

**CURSO: 4º educación**

AÑO: _____

PROFESORA: ANDREA JOFRÉ

COLEGIO MONSEÑOR SCALABRINI

PROGRAMA – 2026

- ESPACIO CURRICULAR: MATEMÁTICA
- CURSO: 4° AÑO EDUCACIÓN.
- PROFESOR: ANDREA JOFRÉ

APRENDIZAJES PLANIFICADOS

A.P. 1: ECUACIÓN Y FUNCIÓN CUADRÁTICA

- Ecuación de segundo grado. Ecuaciones incompleta y completa. Fórmula resolvente.
 - Función cuadrática. Definición. Representación en el plano: la parábola.
 - Análisis de la función cuadrática: vértice, crecimiento y decrecimiento, eje de simetría. Dominio, Imagen.
 - Conjunto de positividad y negatividad. Máximos y mínimos.
 - Surgimiento de nuevo conjunto numérico según el carácter de las soluciones en las ecuaciones cuadráticas.
- Unidad imaginaria. Representación gráfica y expresión cartesiana de un número complejo. Expresión binómica y de par ordenado.

A.P. 2: N° REALES.

- Números reales. Números irracionales.
- Origen de los números irracionales. Definición de números radical. Propiedades de la potenciación y radicación. Extracción de factores en raíces.
- Suma y resta de radicales. Cálculo exacto de perímetros de figuras. Multiplicación y división de radicales con igual y distinto índice. Cálculo exacto de área de figuras.
- Racionalización de denominadores. (3 casos).

A.P. 3: ESTADÍSTICA

- Relaciones entre variables en tablas, gráficos y fórmulas para resolver problemas de diversos contextos.
- Interpretación del significado de las medidas de tendencia central (media aritmética, mediana y moda) para describir datos en estudio (datos simples y datos agrupados).
- Gráficos apropiados (histogramas, polígonos de frecuencia y diagramas de barras) a partir de tablas de frecuencia para datos agrupados para facilitar el análisis y comunicación.
- Identificación e interpretación de las medidas de dispersión (rango, varianza, coeficiente de variación) y su significado a partir de fórmulas.

A.P. 4: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

- Función exponencial y logarítmica. Definición. Representación en el plano.
- Concepto de logaritmo.
- Análisis de las funciones: dominio, imagen, raíces, ordenada, asíntotas y simetrías.
- Utilización de ecuaciones logarítmicas y exponenciales como modelos matemáticos para resolver problemas, analizando los conjuntos de soluciones.

PAUTAS PARA EL PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE 2026

El alumno/a se compromete a:

- ✓ Dirigirse respetuosamente al docente y a sus compañeros.
- ✓ Entrar puntualmente a clase, con uniforme y en perfectas condiciones.
- ✓ En caso de inasistencia, realizar la tarea del día y presentarla en la próxima clase.
- ✓ Traer firmado por los padres las evaluaciones y trabajos prácticos evaluativos.
- ✓ No comer, ni beber, ni mascar chicle en clase.
- ✓ No utilizar ningún tipo de aparatos tecnológicos, salvo el pedido por el docente. ***Los alumnos/as no podrán utilizar el celular y auriculares durante las horas de clase. El estudiante dejará sus aparatos tecnológicos silenciados en su mochila o se guardarán en una caja junto al escritorio del docente.***
- ✓ Traer diariamente la carpeta, cuadernillo y los materiales necesarios para el trabajo áulico.
- ✓ La carpeta debe tener las portadas indicadas, tareas realizadas en clase, extra-clase, trabajos prácticos y evaluaciones. Las hojas deben estar enumeradas y con nombre del alumno. La misma deberá estar completa, ordenada y prolija para ser presentada, junto al cuadernillo en cualquier momento en que sea solicitada.
- ✓ Autocorregirse, guiados por el docente.
- ✓ Realizar las tareas extraescolares y trabajos de la materia, en tiempo y forma.
- ✓ Se permite el uso de **calculadora científica** (no la del celular). Siendo responsabilidad del alumno consultar sobre su utilización durante las clases y llegar sin dificultad al examen. Es fundamental que cada alumno tenga su calculadora y sepa usarla.
- ✓ Notificarse y revisar mensualmente, las calificaciones obtenidas, las cuales la docente subirá al GEI.

Normas de evaluación y criterios de acreditación

- ✓ Se evaluarán todos los contenidos vistos, como así también el aspecto actitudinal.
- ✓ El alumno **ausente** a una prueba avisada deberá justificar con **certificado médico**, como máximo el día de su reincorporación al colegio, para poder tener derecho a rendir la evaluación el día que nuevamente asista a la materia. Es obligación del alumno/a, el día de su reincorporación, **avisar al docente que debe rendir el examen**. En caso de no justificar a tiempo, no podrá rendir siendo la nota obtenida 1 (uno).
- ✓ En caso que los trabajos prácticos se desarrollen grupalmente, se elegirá uno al azar para su corrección y la nota será para todo el grupo. Cada integrante deberá realizar en su práctico las correcciones correspondientes.
- ✓ El docente solicitará la carpeta y cuadernillo del alumno con o sin previo aviso. En caso de no presentarla, tendrá otra oportunidad de entrega, pero la nota máxima será 8 (ocho) y si no la presenta, será 1 (uno).
- ✓ La carpeta constituye una herramienta fundamental para el aprendizaje continuo y el estudio personal. **Deberá presentarse completa y actualizada como condición necesaria para las instancias evaluativas. Su cumplimiento podrá ser considerado dentro de la calificación, asignándole el porcentaje correspondiente si se considera pertinente.**

- ✓ La evaluación será formativa, continua y procesual a través de:
 - Evaluaciones diarias orales o escritas, las cuales no necesariamente serán avisadas. Comprenderán los temas desarrollados hasta el momento.
 - Evaluaciones parciales durante el desarrollo de los ejes temáticos, serán escritas y avisadas con anterioridad.
 - Trabajos prácticos evaluativos, los cuales no necesariamente serán avisados.
- ✓ Se establece, en cada **cierre de aprendizaje**, la siguiente distribución para la calificación correspondiente: el **30%** corresponderá a los **trabajos prácticos** y el **70%** a las **evaluaciones**.
- ✓ Para acreditar el espacio curricular, el alumno deberá aprobar la totalidad de los AP.
- ✓ En el caso de que el alumno en el primer cierre tenga algún AP desaprobado, tendrá un período de recuperación. Si en esa recuperación el estudiante no aprueba el AP, pasa a rendirse en el período de intensificación de Diciembre.
- ✓ El segundo período tendrá la misma metodología de acreditación, el alumno debe aprobar todos los AP del segundo período, de no aprobarlo pasará al período de recuperación, de no aprobarlo deberá rendir los AP en el período de intensificación de Diciembre.

La docente se compromete a:

- ✓ Desarrollar los contenidos del programa en forma adecuada.
- ✓ Implementar los instrumentos necesarios a fin de garantizar la calidad educativa, acompañando a cada alumno en su proceso de enseñanza-aprendizaje, respetando la diversidad y propiciando la inclusión, en un marco de justa y necesaria exigencia.
- ✓ Entregar en tiempo y forma las notas parciales, de proceso y finales.
- ✓ Cargar, mensualmente, las calificaciones de cada alumno al GEI.
- ✓ Respetar y hacer cumplir las normas de convivencia.

La docente les solicita a los Padres/tutor legal, que realicen un seguimiento permanente de la tarea y evolución de su hijo/a, observando las carpetas, firmando evaluaciones escritas u orales y trabajos prácticos evaluativos. También se les solicita que comuniquen cualquier situación que impida un buen aprendizaje del alumno solicitando una entrevista, con previo aviso, a través del cuaderno de comunicados.

.....
Firma y aclaración
del alumno/a

.....
Firma y aclaración del padre,
madre y/o tutor

.....
Firma del docente

PLANILLA DE NOTAS

[illegible]

“ECUACIONES Y FUNCIÓN CUADRÁTICA. NÚMEROS COMPLEJOS”



PROFESORA: ANDREA JOFRÉ

NOMBRE Y APELLIDO DEL ALUMNO: _____

CURSO: _____

AÑO: _____

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Las ecuaciones cuadráticas o ecuaciones de segundo grado son **aquellas en donde el mayor exponente de la variable es 2**. Es una expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Término cuadrático Término lineal Término independiente

Las letras **a**, **b** y **c** se conocen como coeficientes y pueden ser cualquier número real con la única condición: **$a \neq 0$** (dejaría de ser una ecuación cuadrática si $a = 0$). Así, **a** es el coeficiente principal, **b** es el coeficiente de x y **c** es el término independiente.

Resolver estas ecuaciones implica encontrar el o los valores que satisfacen dicha igualdad.

Tipos de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas pueden ser completas o incompletas.

- **Ecuación cuadrática completa**: cuando tiene los tres términos, es decir, ningún coeficiente es cero.
Ejemplo:

✚ Si **$b = 0$** $\rightarrow ax^2 + c = 0$. Ejemplo:

✚ Si **$c = 0$** $\rightarrow ax^2 + bx = 0$. Ejemplo:

✚ Si **$b = 0$ y $c = 0$** $\rightarrow ax^2 = 0$. Ejemplo:

Resolución de ecuaciones de segundo grado o ecuaciones cuadráticas

Resolver la ecuación consiste en encontrar los dos valores x_1 y x_2 que anulan al polinomio, puesto que es una ecuación de segundo grado. Estos valores se llaman raíces o ceros del polinomio.

➤ **ECUACIONES INCOMPLETAS**

1) Si **$b = 0$** , es decir, falta el término lineal.

Ejemplos:

a) $x^2 - 9 = 0$

despejamos x

$x_1 =$ $x_2 =$

b) $-2x^2 + 50 = 0$

despejamos x

$x_1 = +5$ $x_2 = -5$

c) $3x^2 + 27 = 0$

$x =$

No existe un número real que lo verifique,
por lo tanto presenta raíces que no son reales

2) Si **$c = 0$** , es decir, cuando falta el término independiente, para resolverla se debe tener en cuenta que: **$m \cdot n = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ o } n = 0$** .

Ejemplos:

a) $2x^2 - 3x = 0$

→ al tener x en los dos términos se aplica factor común

$x_1 =$ $x_2 = \frac{3}{2}$

Se aplica la propiedad de elemento absorbente: "si una multiplicación da 0 es porque uno de los factores es cero". Entonces consideremos a x_1 como cero. Y para encontrar el valor de la otra x, despejamos normalmente.

b) $-3x^2 + x = 0$

$x_1 =$ $x_2 =$

3) Si $b = 0$ y $c = 0$, es decir, faltan el término lineal y el término independiente.

Ejemplo:

$$4x^2 = 0$$

➤ ECUACIONES COMPLETAS

Se resuelven aplicando la siguiente fórmula, llamada **fórmula resolvente de una ecuación de segundo grado**. La misma que utilizamos para resolver los trinomios cuadrados no perfectos.

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Para resolver una ecuación cuadrática completa usando la fórmula resolvente, vamos a realizarlo de la siguiente manera:

1. Igualar la ecuación a 0 si no lo estuviera.
2. Identificamos los coeficientes a , b y c .
3. Los sustituimos en la fórmula general.
4. Resolvemos para hallar x_1 y x_2 .

Ejemplo:

$3x^2 + 2x - 1 = 0$ entonces:

$a =$

$b =$

$c =$

Los reemplazamos en la fórmula resolvente

¡Cuidado con los signos!

Por lo tanto $x_1 =$ y $x_2 =$

- ❖ Resolveremos la siguiente ecuación y clasificar

$$1 - 4(x^2 - x) = (2x - 1)(x - 1)$$

Actividades:

- 1- Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas, clasificalas:

a) $x^2 + 4x + 1 = 4 - x^2 + 3x$

b) $x - (1 - 3x^2) = 2x^2 - (-x - 3)$

c) $x(5 - 2x) = 3\left(-\frac{2}{3} + 2x\right) + 2$

d) $x(1 + x) - \frac{1}{2}(x - 2) = 10 + \frac{1}{2}x$

e) $x(2x + 6) = x^2 + x - 4$

f) $(x + 3) \cdot (6x - 3) + 5 \cdot (9 - 7x) = 22$

g) $x(x + 2) - 2x(x - 0,5) + 8 = x^2 - 1$

h) $2x^2 = 3x^2 + 36$

i) $5x^2 + 2x = 4x^2 + 3x - 0,25$

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Pensar en las siguientes situaciones de la realidad:

- el recorrido que realiza una pelota cuando se la pasó a un amigo.
- la forma de los chorros de agua en una fuente.
- las formas de algunas pistas de patineta.

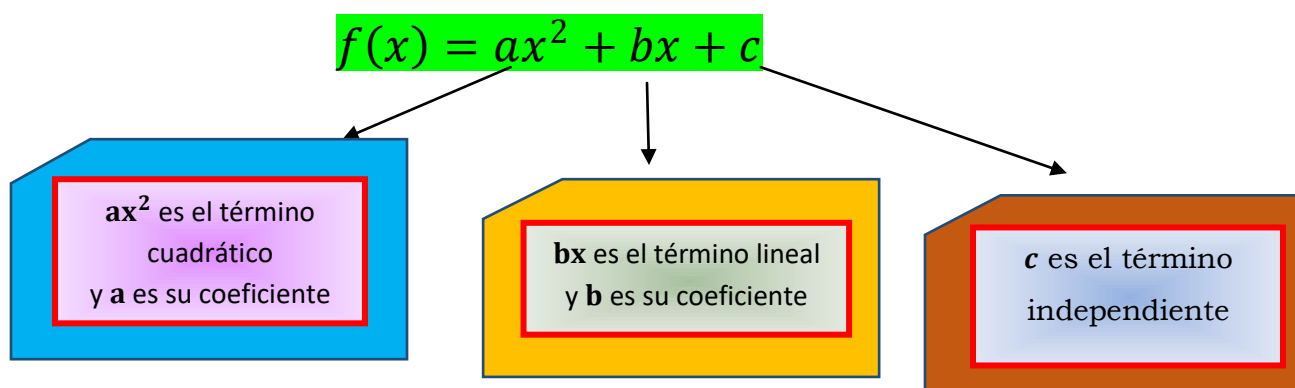
Seguramente, pensaste en estas imágenes:



Estas curvas se llaman parábolas y en matemática, las parábolas son las gráficas de funciones denominadas, “funciones cuadráticas”:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ siendo } a, b, c \text{ números reales, con } a \neq 0$$

Esta expresión se conoce como **expresión general**.



El dominio de la función cuadrática es el conjunto de los números reales y su representación gráfica es una **parábola**.

Gráfica de la parábola y sus elementos

Para realizar el gráfico de una parábola sin utilizar una tabla de valores, se deben calcular los elementos de la misma y luego representarlos. Sus elementos son:

➤ Raíces o ceros

Son los puntos de intersección de la gráfica y el eje x , es decir donde se cumple que $f(x) = 0$. Por lo tanto, se debe calcular los valores de la variable x para los cuales la variable y es igual a cero. Es decir debemos resolver la ecuación cuadrática. Podemos aplicar fórmula resolvente.

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

➤ Eje de simetría

Es la recta vertical, paralela al eje y , que divide a la curva en dos ramas simétricas. Tiene por ecuación: (Marcamos el eje vertical de simetría con líneas de puntos)

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad o \quad x_v = \frac{-b}{2a}$$

➤ Vértice de la parábola

El vértice es un punto, sobre el eje de simetría en el que la parábola pasa de ser creciente a decreciente, o viceversa. La coordenada de x de este punto, coincidirá con el eje de simetría y la de y , marcará si es un máximo o un mínimo. Sus coordenadas se calculan de la siguiente manera:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad o \quad x_v = \frac{-b}{2a} \quad y_v = f(x_v) \quad \text{Las coordenadas del vértice son: } V = (x_v; y_v)$$

➤ Ordenada al origen

Es el punto de intersección de la gráfica con el eje y , es decir, es el valor de la variable y cuando x toma el valor 0 ($f(0) = y$). Siempre coincide, la coordenada y con el término independiente de la función (c). Sus coordenadas son: $(0; c)$.

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 5x + 6$:

Ceros o raíces:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Eje de simetría:

$$x = x_v$$

$$x =$$

Vértice de la parábola

$$x_v =$$

$$y_v = f(x_v)$$

$$y_v = f(\quad) =$$

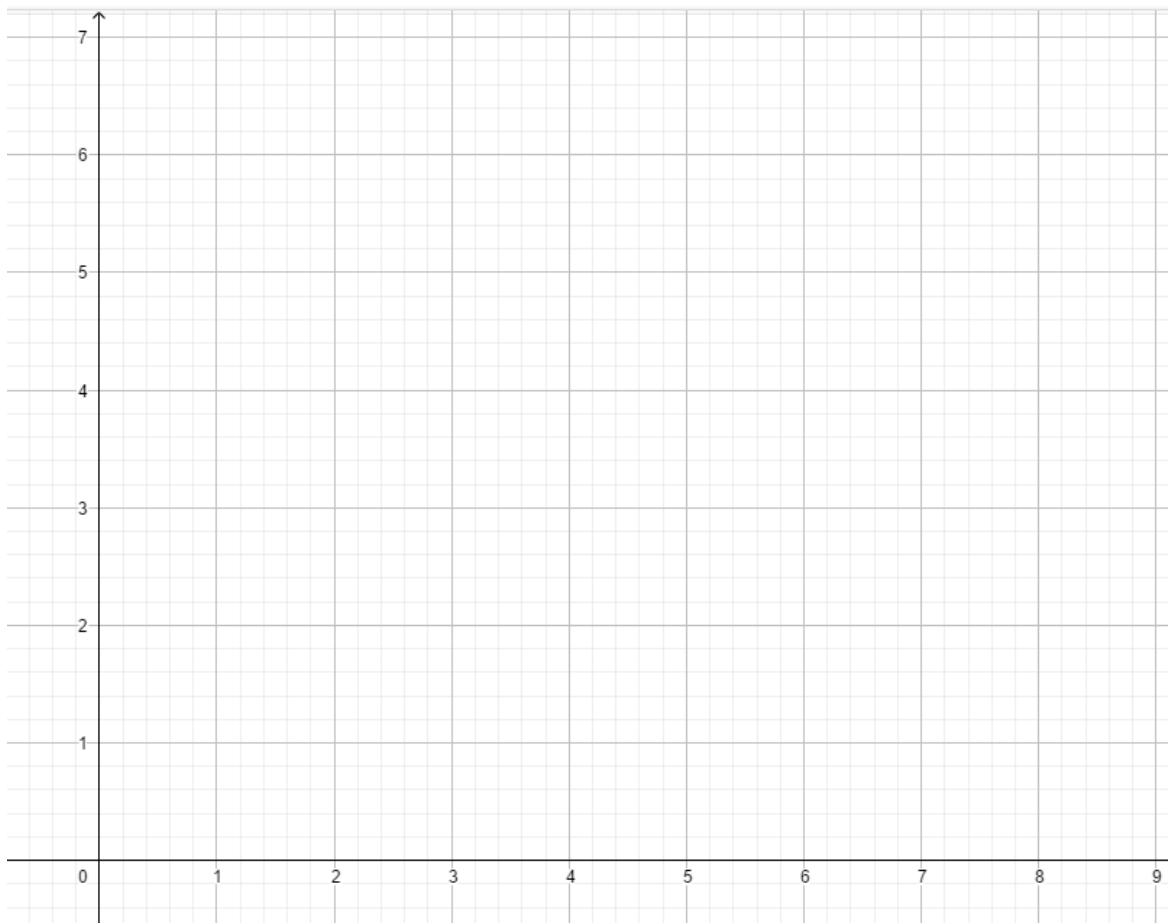
Luego las coordenadas del vértice son: **$V = (x_v, f(x_v))$**

$$V = (\quad; \quad)$$

Ordenada al origen

Punto **(0 ; c)** así la ordenada al origen es:($\quad$; $\quad$).

Utilizando estos elementos podemos graficar:



ACTIVIDADES

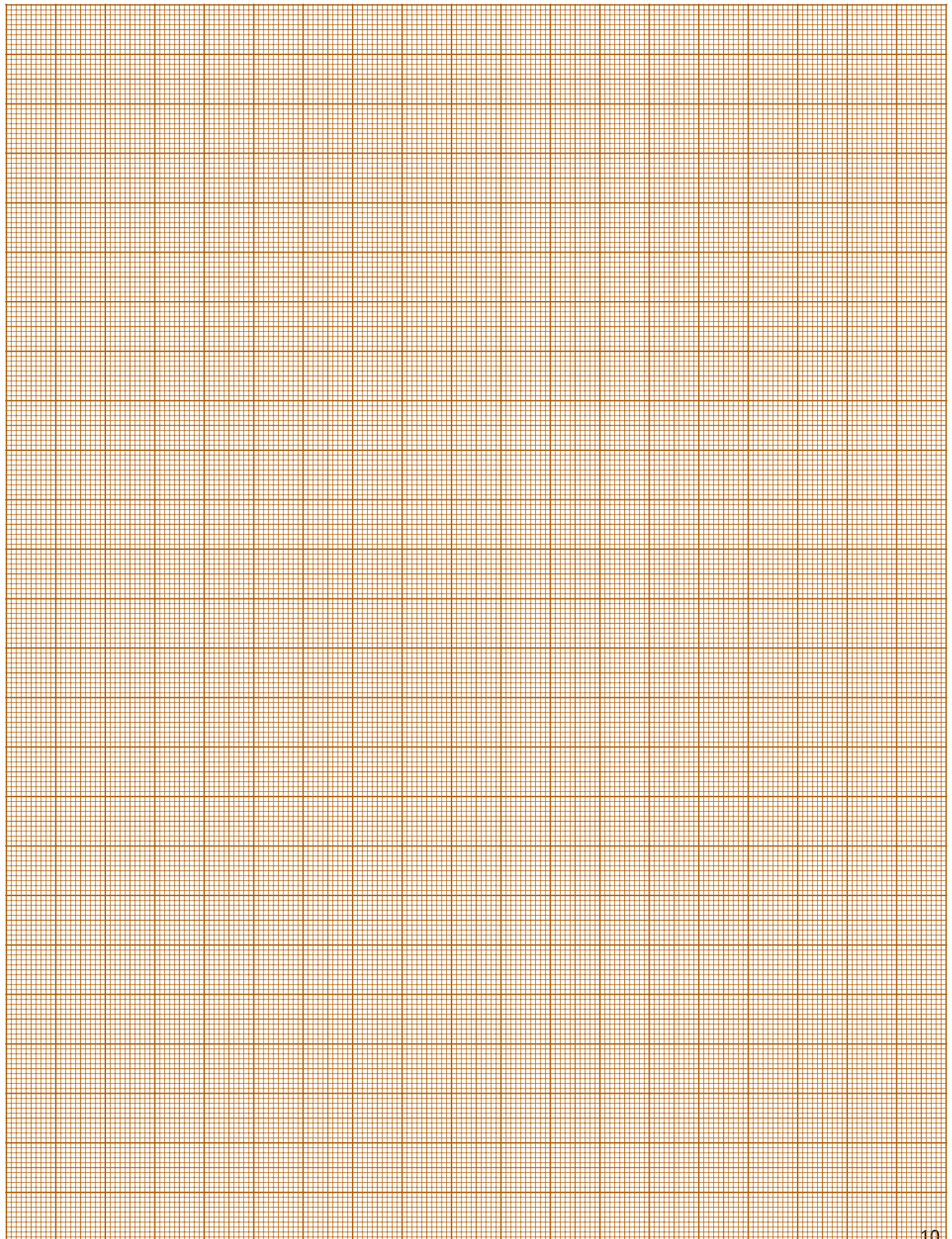
1- Represente gráficamente las siguientes funciones cuadráticas. Trabajar en papel milimetrado:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

c) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

b) $f(x) = -x^2 + 2$

d) $f(x) = -2x^2 + 4x$



TRABAJO PRÁCTICO N° 4

“FUNCIÓN CUADRÁTICA”

Aspectos que se tendrán en cuenta (se descontará el siguiente porcentaje de la nota obtenida):

- ✓ Cumplimiento en la forma de presentar el trabajo según lo solicitado: resolución en hoja aparte, trabajar con lapicera, en la fecha estipulada, ser prolijo y ordenado. (10%)
- ✓ Presentación de TODOS los cálculos y procedimientos. (15%)

1- Completar el siguiente cuadro y realizar todos los cálculos necesarios en tu hoja. Realizar las gráficas correspondientes a cada función en papel milimetrado, en un plano cartesiano individual. (15% c/u)

Función	a	b	c	Raíces	Eje de simetría	Vértice	Ordenada al Origen
$f(x) = x^2 - 5x + 6$							
$g(x) = -x^2 + 4$							
	1	-1	$1/4$				
	$-1/2$	0	$3/2$				
$m(x) = x^2 + x + 1$							



COLEGIO MONSEÑOR SCALABRINI
MATEMÁTICA- PROF. ANDREA JOFRE

NOMBRE Y APELLIDO:
CURSO:

Análisis de gráficos

Ahora que ya sabemos graficar, tomaremos el siguiente ejemplo, para analizar su gráfica.

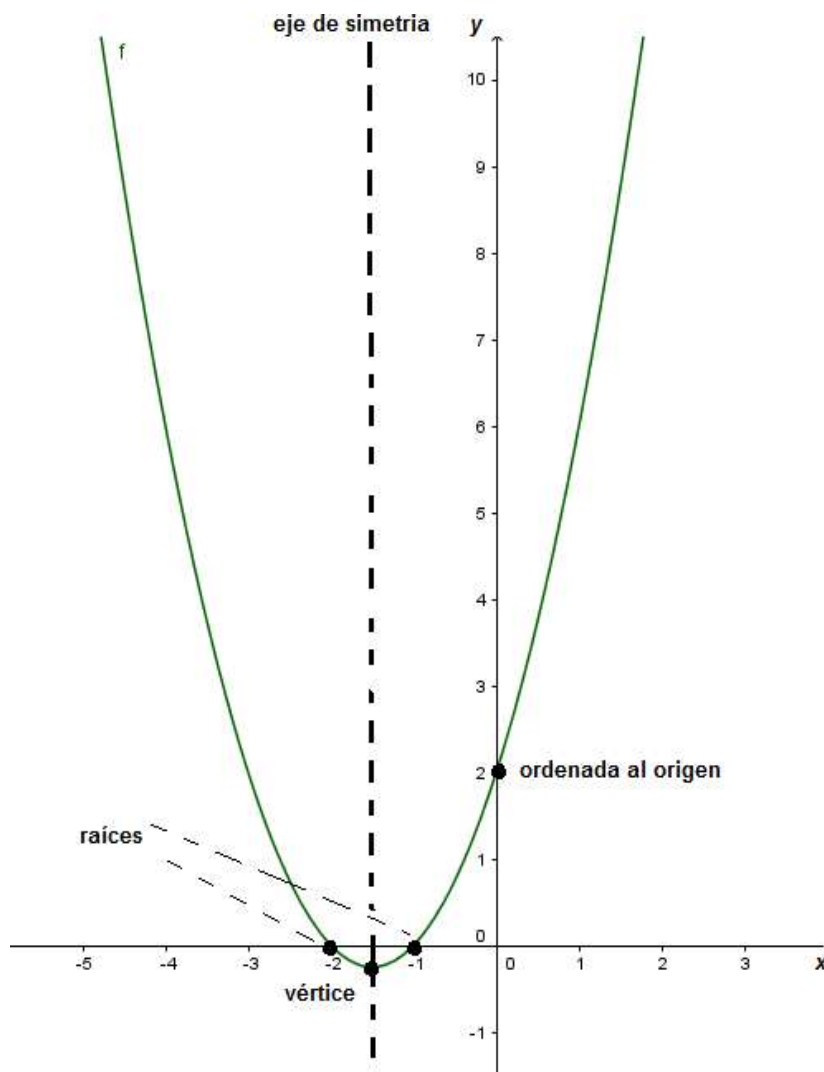


Dada La siguiente función cuadrática, recordemos:

$$y = x^2 + 3x + 2$$

- Reconocemos: $a = \dots\dots\dots$ $b = \dots\dots\dots$ $c = \dots\dots\dots$
- Como $a = \dots\dots\dots$, es $\dots\dots\dots$ que cero. Por lo que las ramas de la parábola se abren hacia $\dots\dots\dots$
- El valor de la ordenada al origen es $(0; \dots\dots\dots)$
- vértice: $V (\dots\dots\dots; \dots\dots\dots)$
- Eje de simetría: $x_v = \dots\dots\dots$
- Raíces: $x_1 = \dots\dots\dots; x_2 = \dots\dots\dots$
- Para una construcción más precisa de la gráfica, tomaremos un punto adicional: elijo $x = 1$, reemplazamos

$$f(1) =$$



Por lo tanto la parábola pasará por el punto $(1;6)$ y su punto simétrico, lo podemos obtener a partir de las distancias al eje de simetría.

**Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
Conjuntos de Positividad y Negatividad. Dominio e Imagen.**



- **Intervalo de Crecimiento**

Una función es creciente en cierto intervalo de su dominio, cuando al aumentar los valores de la variable independiente, aumentan los valores de la variable dependiente:

$$f(x) \text{ es creciente si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- **Intervalo de Decrecimiento**

Una función es decreciente en un cierto intervalo de su dominio cuando al aumentar los valores de la variable x , disminuyen los valores de la variable y :

$$f(x) \text{ es decreciente si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Retomando el ejemplo anterior, observa que si **vamos aumentando los valores de x** (desde los negativos hacia los positivos), **la función crece desde el valor de x del eje de simetría hacia el infinito.**

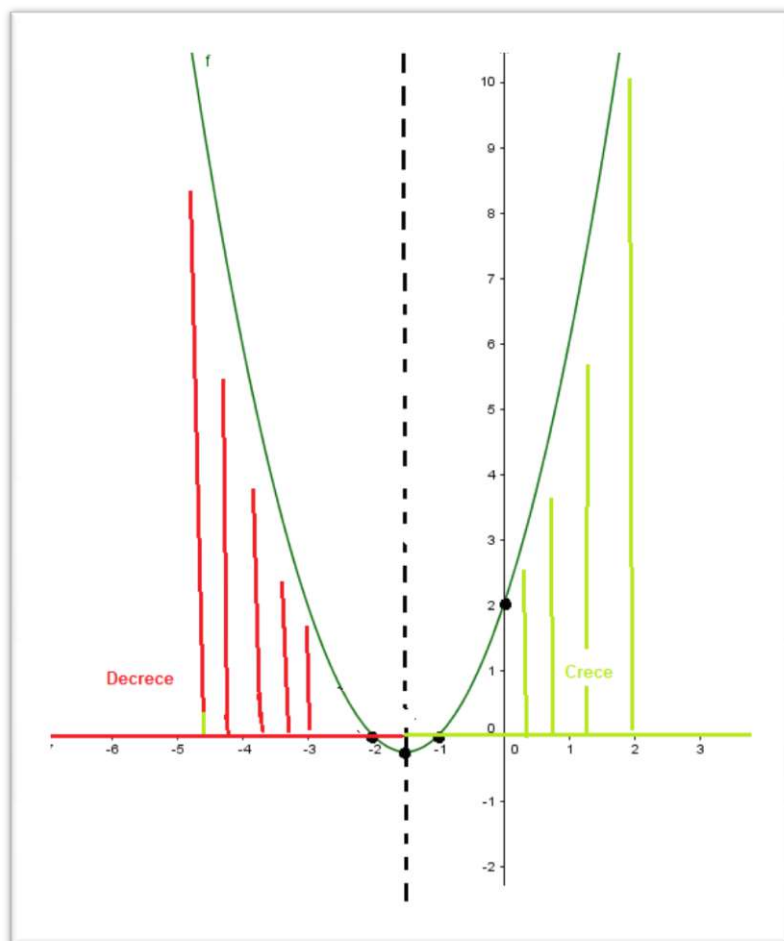
Por lo tanto, decimos que en la función

❖ Intervalo de crecimiento =

Observa que si **vamos aumentando los valores de x** (desde los negativos hacia los positivos), **la función decrece desde el $-\infty$ hasta el valor del eje de simetría.**

Por lo tanto, decimos que en la función

❖ Intervalo de decrecimiento =



- **Máximo**

Se denomina máximo de una función cuadrática al valor de " x " para el cual la función toma el mayor valor.

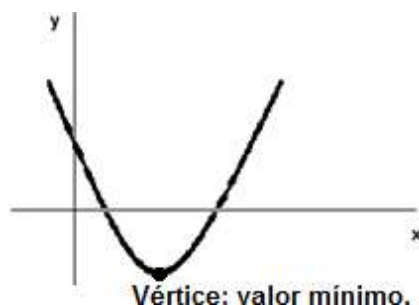
- **Mínimo**



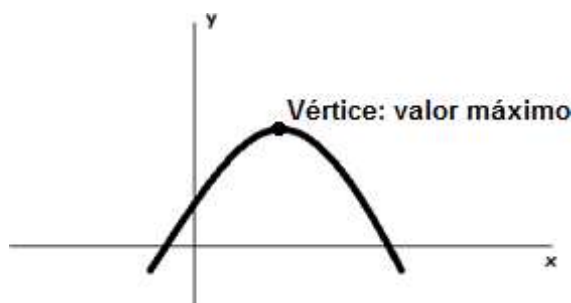
Se denomina mínimo de una función cuadrática al valor de “x” para el cual la función toma el menor valor.

Siempre el vértice de la parábola será el máximo o mínimo, dependiendo la orientación de la gráfica.

Si las ramas de la parábola se abren hacia arriba, el vértice es un *valor mínimo*.



Si las ramas de la parábola se abren hacia abajo el vértice es un *valor máximo*.



❖ *En nuestro ejemplo, tenemos un mínimo en el punto (-1,5; -0,25)*

- **Conjunto de Positividad (C+)**

El subconjunto del dominio en los que la función es positiva, es decir las imágenes toman valores positivos ($f(x) > 0$) se denomina **conjunto de positividad** de la función, se puede expresar como intervalo, y se simboliza C^+ .

- **Conjunto de Negatividad (C-)**

El subconjunto del dominio en los que la función es negativa, es decir las imágenes toman valores negativos ($f(x) < 0$) se denomina conjunto de negatividad de la función, se puede expresar como intervalo, y se simboliza C^- .

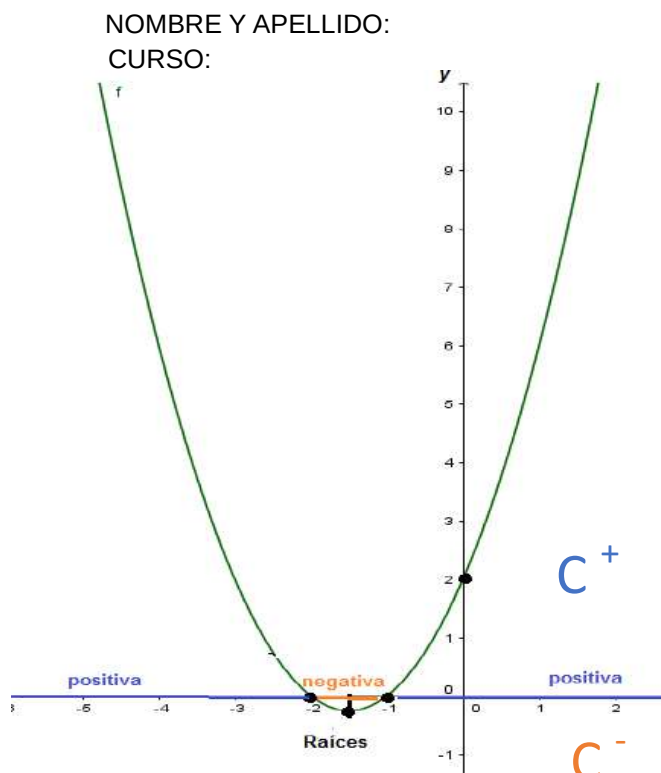


En el caso del análisis de los conjuntos de positividad y negatividad de una función cuadrática, siempre ocurre que **las raíces nos determinan los intervalos sobre el eje x, donde la parábola es positiva o negativa**. Del eje x hacia arriba, tendremos el conjunto de positividad y del eje x hacia abajo el conjunto de negatividad

Retomando el ejemplo anterior:

❖ $C^+ =$

❖ $C^- =$



Fíjense que en $x=-2$ y $x=-1$, la gráfica tiene imagen nula. Por tal motivo, no incluimos esos valores en los extremos de los intervalos, ya que sus imágenes no son ni positivas ni negativas.

- **Dominio**

El dominio de una función cuadrática será el conjunto de los números reales, en caso de que no se acote por alguna situación particular.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

- **Imagen**

El conjunto imagen de una función, es el conjunto de valores sobre el eje de las ordenadas o eje y, los cuales son imagen de algún valor de x.

En el caso de la función cuadrática, el conjunto imagen lo determina la ordenada del vértice. Si las ramas de la parábola se abren hacia arriba, el conjunto imagen será $\text{Im}(f) = [f(x_v); \infty)$ ó $[y_v; \infty)$

Si las ramas de la parábola se abren hacia abajo, el conjunto imagen será $\text{Im}(f) = (-\infty; y_v]$

En el ejemplo:

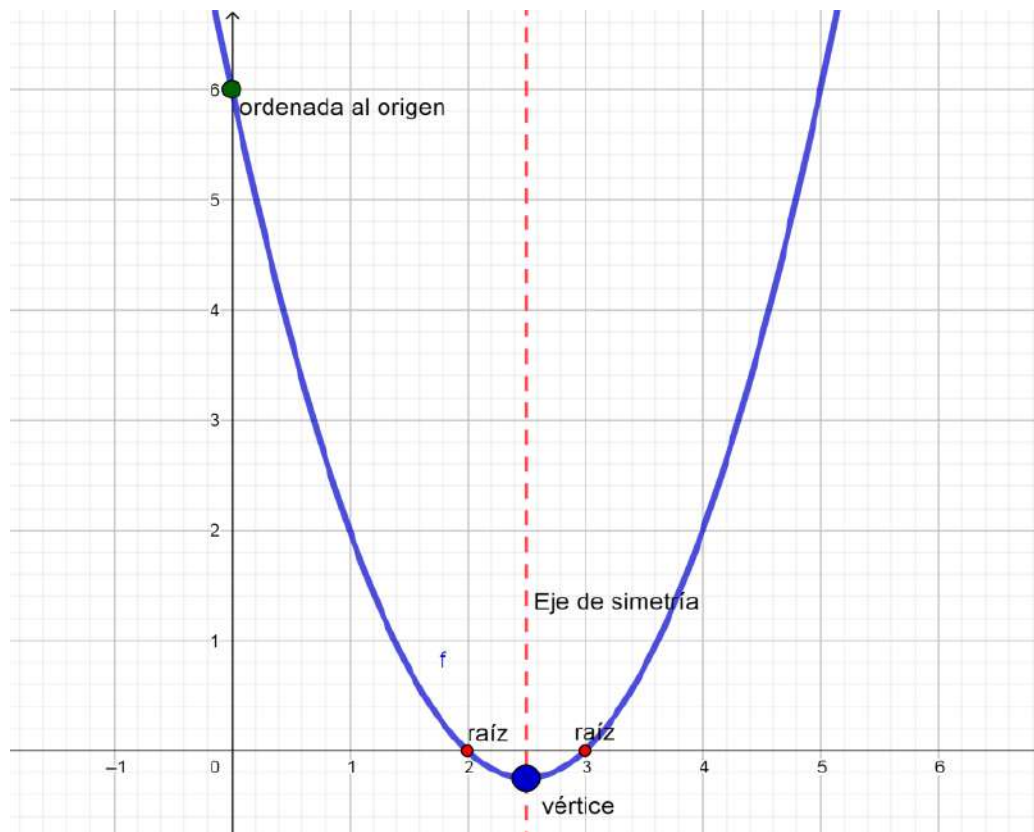
❖ $\text{Dom}(f) =$

❖ $\text{Im}(f) =$



A continuación, analizaremos la gráfica del ejemplo de la pág. 4.

Ejemplo sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 5x + 6$:



Análisis de la gráfica $f(x)$:

- ❖ *Intervalo de crecimiento:*
- ❖ *Intervalo de decrecimiento:*
- ❖ $f(x)$ presenta un mínimo en el punto

$f(x)$ no presenta un

- ❖ C^+ :
- ❖ C^- :
- ❖ $Dom(f) =$
- ❖ $Im(f) =$

En general, dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, se verifica que:

Si $a > 0$, la función: *Alcanza un mínimo en el vértice ( de la parábola.

*Decrece en el intervalo $(-\infty; x_v)$

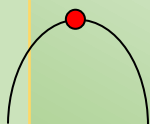
*Crece en el intervalo $(x_v; +\infty)$



Si $a < 0$, la función: *Alcanza un máximo en el vértice de la parábola.

*Crece en el intervalo $(-\infty; x_v)$

*Decrece en el intervalo $(x_v; +\infty)$



ACTIVIDADES

Graficar las funciones de la actividad 1) y realizar el análisis de la cada función.

 a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

 b) $f(x) = -x^2 + 2$

 c) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

 d) $f(x) = -2x^2 + 4x$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5



“FUNCIÓN CUADRÁTICA: ANÁLISIS DE LA PARÁBOLA”

Aspectos que se tendrán en cuenta (se descontará el siguiente porcentaje de la nota obtenida):

Complete la tabla teniendo en cuenta las siguientes funciones. Debes realizar y presentar la gráfica de cada función.

Función	Intervalo de crecimiento	Intervalo de decrecimiento	C^+	C^-	Mínimo	Máximo	Dom(f)	Im (f)
a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$								
b) $g(x) = -x^2 + 4$								
c) $h(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$								
d) $m(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$								
e) $p(x) = x^2 + x + 1$								

Ejercicio	a	b	c	d	e
Puntaje obtenido	20%	20%	20%	20%	20%



COLEGIO MONSEÑOR SCALABRINI
MATEMÁTICA- PROF. ANDREA JOFRE

NOMBRE Y APELLIDO:
CURSO:

Síntesis



Una función cuadrática es una función cuya representación gráfica es una curva llamada parábola.

- **Forma general:** $y = ax^2 + bx + c$ en donde **a**: coeficiente principal, el cual nunca puede ser cero; **b**: coeficiente lineal y **c**: termino independiente.
- **El coeficiente c:** gráficamente nos determina la ordenada al origen (0;c), punto donde la parábola corta al eje y.
- **El coeficiente a:** nos determina gráficamente hacia donde se abren las ramas de la parábola.

Si a es positivo, las ramas se abren hacia arriba.

Si a es negativo, las ramas se abren hacia abajo.

- **Eje de simetría:** recta imaginaria que nos divide simétricamente a la parábola.

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

- **Vértice:** Es el punto mínimo o máximo de la parábola, el mismo pertenece al eje de simetría.

Si $a > 0$ el vértice es un mínimo.

Si $a < 0$ el vértice es un máximo.

$$V = (x_v ; y_v)$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} ; y_v = f(x_v)$$

- **Raíces o ceros de la función:** son los valores de x por donde la parábola corta al eje de abscisas. Se calculan resolviendo la ecuación cuadrática.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

- $\Delta > 0$, la función tiene 2 raíces distintas. Corta en dos puntos al eje x.
- $\Delta < 0$, la función NO tiene raíces reales. No corta al eje x.
- $\Delta = 0$, la función tiene 1 raíz doble. Corta en un solo punto al eje x.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN



A continuación los invito a pensar distintas situaciones de la vida cotidiana, las cuales se resuelven mediante la modelización y resolución de funciones cuadráticas.

Ejemplo:

Si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por

$$h(t) = 40t - 16t^2$$

- a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?
- b) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
- c) ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al piso?
- d) ¿Cuánto tarda en alcanzar una altura de 20 pies?

Solución: para poder contestar estas preguntas, es conveniente primeramente graficar la función $h(t)$, y para ello, nos es necesario determinar los elementos de dicha función.

$$h(t) = 40t - 16t^2$$

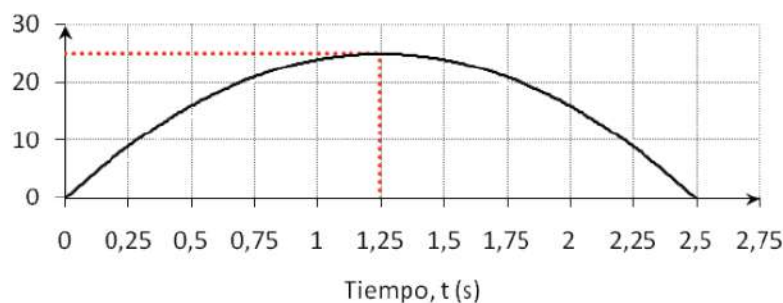
• **Coeficiente del término cuadrático:** -16 (las ramas de la parábola van hacia abajo).

• **Ceros o raíces:** $-16t^2 + 40t = 0$ que resolviendo dan: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{5}{2}$

• **Coordenadas del vértice:** $V(x_v ; y_v)$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2(-16)} = \frac{5}{4} \quad , \quad y_v = -16\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 40 \cdot \frac{5}{4} = 25 \quad \Rightarrow \quad V\left(\frac{5}{4}, 25\right)$$

• **Ordenada al origen:** $h(0) = 40 \cdot 0 - 16 \cdot 0^2 = 0$



El gráfico describe la altura de la pelota en función del tiempo. Podemos observar que la pelota alcanza su altura máxima 25 pies (y_v) a los 1,25s (x_v); y cae al piso a los 2,5 s (cero o raíz).

Para calcular el tiempo necesario para alcanzar una altura determinada, planteamos la ecuación cuadrática: $h(t) = -16t^2 + 40t$

$$20 = -16t^2 + 40t \rightarrow 0 = -16t^2 + 40t - 20$$



Entonces, las **respuestas al problema** son:

- a) La altura máxima alcanzada por la pelota es de 25 pies.
- b) Alcanza la altura máxima a los 1,25 segundos.
- c) La pelota tarda en llegar al piso 2,5 segundos.
- d) La pelota tarda en alcanzar 20 pies de altura, 0,69 y 1,8 segundos aproximadamente (Fijate en la gráfica, que la pelota toma esa altura en dos momentos, al subir y al caer).



La unidad de medida llamada **Pie** es una unidad de longitud de origen natural (basada en el pie humano), utilizada por las civilizaciones antiguas:

1 pie equivale 0,3048 metros ó 30,48 centímetros. Entonces si queremos responder en metros o centímetros, debemos realizar una regla de 3 simple y podemos concluir que:

- a) la altura máxima alcanzada por la pelota es de 7,62m ó 762cm.
- d) La pelota tarda en alcanzar una altura de 6,096m ó 609,60cm a los 0,69 y a los 1,8 segundos, aproximadamente.

TRABAJO PRÁCTICO N° 6

“FUNCIÓN CUADRÁTICA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS”



Resuelvan los siguientes problemas, realizando todos los cálculos, procedimientos y el gráfico correspondiente a cada situación. Recuerden formular una respuesta completa a cada pregunta.

Actividades: Deberán conformar 5 equipos de trabajo, de 4 o 5 integrantes cada uno. Por equipo deberán presentar la resolución de TODAS las situaciones problemáticas que a continuación se presentan. Luego, por equipos presentarán de una manera original, el problema que les sea asignado.

- 1) En una isla se introdujeron 100 venados. Al principio la manada comenzó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Supongamos que el número de venados, a los t años está dado por:

$$N(t) = -t^2 + 21 \cdot t + 100$$

- a) ¿Colocaría alguna restricción para t ? ¿Por qué?
 - b) ¿A partir de qué momento la manada comienza a decrecer?
 - c) ¿Se extinguirá la población? Si es así, ¿cuándo ocurrirá?
 - d) ¿Para qué intervalos de tiempo es $N(t) < 0$? ¿Tiene sentido? ¿Por qué? ¿Qué significaría?
- 2) Una estación de servicio describe el beneficio semanal, de acuerdo con los litros de nafta sin plomo que vendió, según la siguiente fórmula:

$$B(x) = -x^2 + 46x - 205$$

El beneficio se expresa en miles de pesos y la variable x se expresa en miles de litros.

- a) ¿Cuánto dinero pierde si no vende ningún litro de nafta?
 - b) ¿Cuántos litros se deben vender para que el beneficio sea máximo?
 - c) ¿Para qué cantidad de litros no hay pérdida ni ganancias?
- 3) Hay un famoso gol de tiro libre, convertido por Chilavert, arquero de Vélez, que resultó “inatajable” para Burgos, arquero de River, en el partido del 22 de marzo de 1996. Se sabe que la trayectoria de la pelota lanzada por Chilavert puede ser representada por la siguiente función:

$$H(x) = -0,02x^2 + 1,16x$$



En donde x representa la cantidad de metros en línea recta sobre el pasto desde el pie de Chilavert hasta el lugar donde se encuentra la pelota, y h la altura alcanzada por la pelota medida en metros.

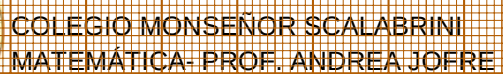
- a) ¿A cuántos metros de Chilavert la pelota hubiera tocado el suelo (de no haber sido interrumpida su trayectoria por la red del arco?
 - b) ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó la pelota, y a qué distancia del lugar de partida?
 - c) ¿Durante cuántos metros en línea recta, la pelota aumentó su altura?
 - d) ¿Durante cuántos metros en línea recta, la pelota disminuyó su altura?
- 4) En un estanque se coloca una cierta cantidad de peces. La siguiente fórmula permite calcular la cantidad “ y ” de peces que hay en el estanque después de “ x ” años:

$$y = -x^2 + 6x + 16$$

- a) ¿Cuántos peces se colocaron en el estanque?
 - b) ¿Después de cuántos años se obtiene la mayor cantidad de peces? ¿Cuál fue la mayor cantidad?
 - c) ¿Después de cuántos años no quedan peces en el estanque?
 - d) ¿Durante cuántos años la cantidad de peces aumentó? ¿Durante cuántos años la cantidad de peces disminuyó?
- 5) Se arroja verticalmente hacia arriba una pelotita de tenis imprimiéndole una velocidad de 10 m/seg. Su altura en metros sobre el suelo, t segundos después de haber sido lanzada, está dada por la función:

$$h(t) = 1,05 + 10t - 5t^2$$

- a) ¿Desde qué altura fue lanzada la pelotita?
- b) Indiquen en qué instante alcanza la altura máxima y calculen dicha altura
- c) ¿Para qué valores de t asciende y para cuáles desciende?
- d) Hallen el tiempo que demora en llegar al suelo.
- e) ¿Cuánto tarda en alcanzar una altura de 4,8 metros?



NOMBRE Y APELLIDO:
CURSO:



EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Calcular el valor de x en las siguientes ecuaciones:

- $x + 2 = 5$ la solución es un número:
- $x + 6 = 2$ la solución es un número:
- $-3x = 2$ la solución es un número:
- $x^2 = 2$ la solución es un número:
- $x^2 + 1 = 0$ la solución es un número:

Veamos que sucede con esta última ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = 0 - 1$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1}$$



No podemos finalizarla, ya que no encontramos ningún *número Real* que al multiplicarlo por sí mismo 2 veces de por resultado *-1*. Esto sucederá con todas las raíces de índice par y radicando negativo. Al no tener solución en el *conjunto de los números reales*, se debió introducir *nuevos números* en donde este tipo de ecuaciones tuvieran solución.

LOS NÚMEROS IMAGINARIOS

Fue Euler quien en el siglo XVIII introdujo el símbolo “*i*” para nombrar a $\sqrt{-1}$.

Entonces ahora sí podemos terminar de resolver la ecuación anterior:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = 0 - 1$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1}$$

$$x = \pm i$$



Por lo tanto:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)}$$

$$\sqrt{-81} = \sqrt{81 \cdot (-1)} =$$



$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i$$

$$= \sqrt{81} \cdot \sqrt{(-1)} = \pm 9i$$

ACTIVIDAD Nº 1: Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 4 = 0$

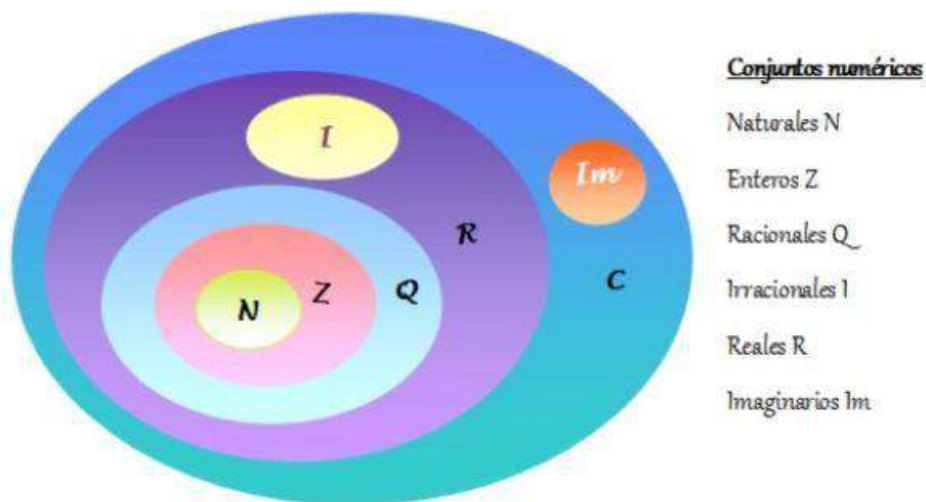
c) $3x^2 + 12 = 0$

b) $8 - x^2 = 15$

d) $2x^2 + 3 = -29$

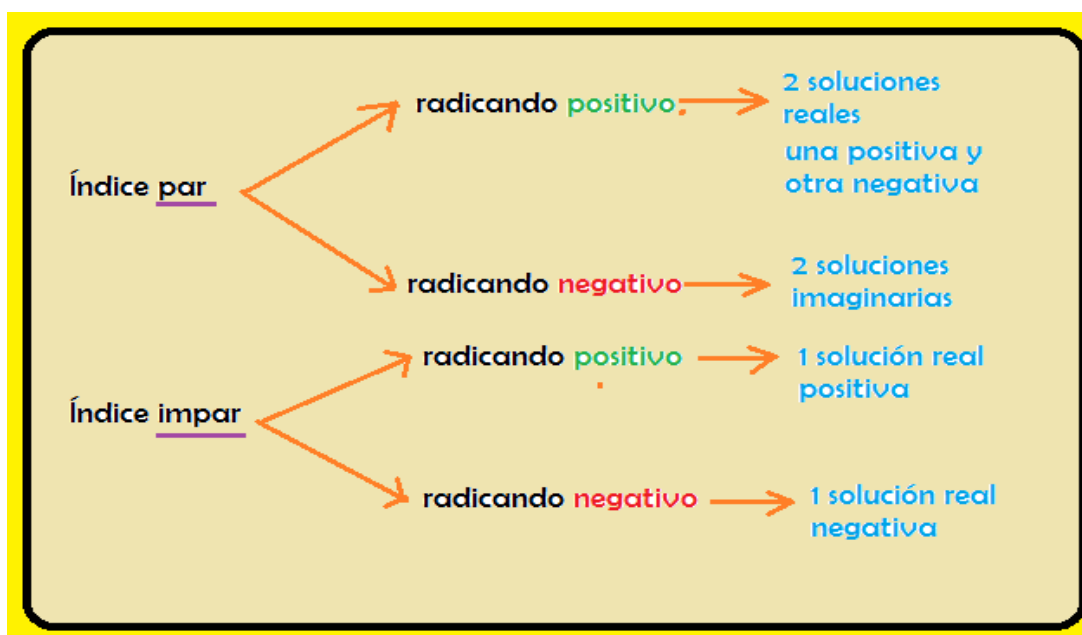
Pero si hay números nuevos, debe haber también un conjunto numérico nuevo, el cual incluya los números imaginarios. El nuevo conjunto es llamado:

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS (C)



Entonces, ahora sí podemos completar la regla de signos en la radicación:

Regla de signos de la radicación:





Como se puede observar en el diagrama de conjuntos numéricos anterior, los números Complejos están formados por el conjunto de los **números Reales** y los **números imaginarios**. Es por eso que para indicar un número complejo, muchas veces se lo hace nombrándolo con “ z ”.

Hay varias formas de expresar un número complejo (nosotros veremos dos de ellas):

- **Forma de par ordenado $z=(a; b)$:** como todo par ordenado, es importante el orden de sus coordenadas. Primero se coloca la parte real y luego la parte imaginaria.

Por ejemplo: $z = (2; 3)$, de esta manera estamos indicando que el 2 es un número real y el 3 es un número imaginario

- **Forma binómica $z=a + bi$:** es un binomio, donde uno de los términos es la parte real y el otro la parte imaginaria, sin importar el orden.

$$z = a \pm bi$$

$a, b \in \mathbb{R}$

Por ejemplo: $z = 2 + 3i$ ó $z = 3i + 2$, representan al mismo número complejo

Hay números complejos que tienen solamente parte real (su parte imaginaria es cero), es decir es un número Real. Pero también hay números complejos que solamente tienen parte imaginaria (parte real cero), a estos se los llama imaginarios puros.

ACTIVIDAD Nº 2: Completar el siguiente cuadro. Luego pintar de color verde los números que sean reales y de color azul los que son imaginarios puros.

Número complejo	Parte Real	Parte Imaginaria
$z_1 = 5i + 1$		
$(0; -1)$		
	-3	0
$z_4 = 2 - i$		
	1	1
$(1; 0)$		
$z_7 = i$		
$z_8 = 2$		

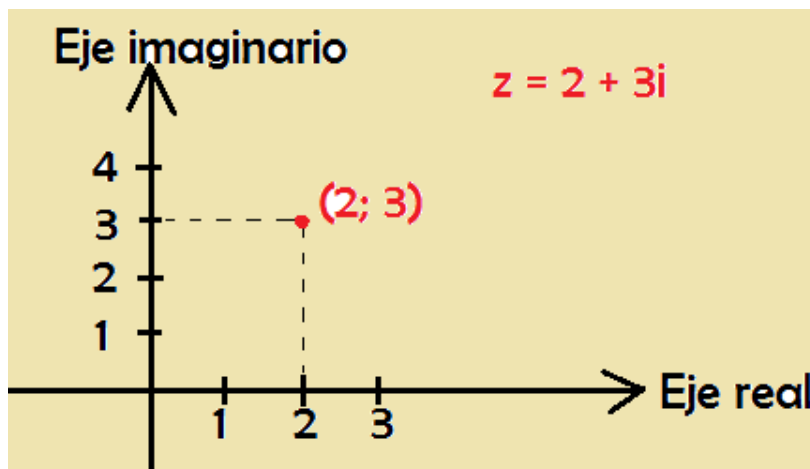


Representación gráfica de un número complejo:

Los números reales los representamos en una recta numérica. Pero como los números complejos están formados por reales e imaginarios, necesitamos dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical, es decir el plano cartesiano. Donde en el eje vertical, estarán todos los números imaginarios y se llamará “eje imaginario” y en el eje horizontal todos los números reales, llamado “eje real”.

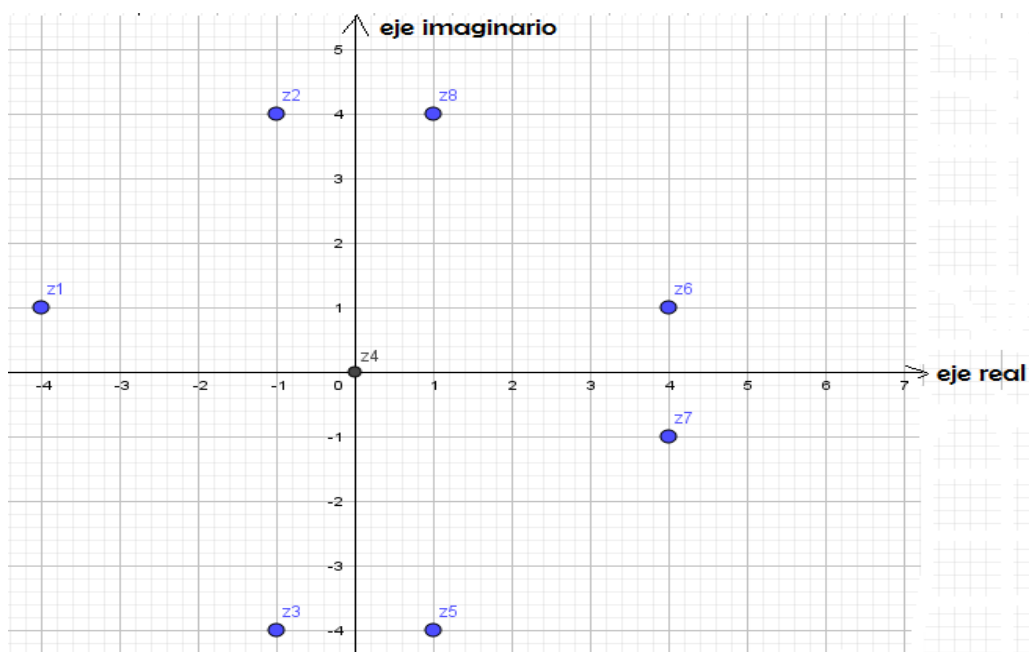
Siguiendo con el ejemplo anterior:

$$z = 2 + 3i$$



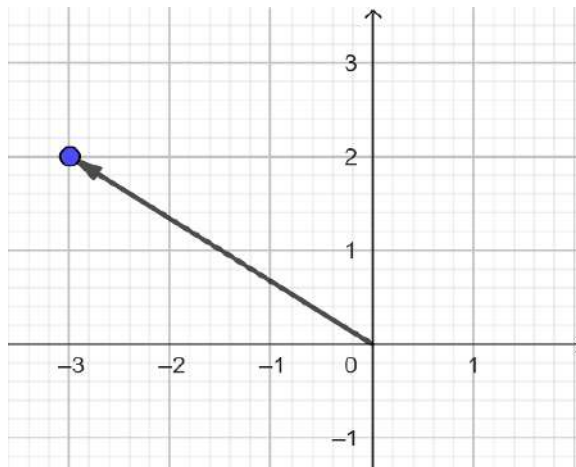
ACTIVIDAD N° 3: Ubicar en un mismo plano cartesiano los números complejos dados y obtenidos en la ACTIVIDAD N° 2.

ACTIVIDAD N° 4: Escribir en forma binómica y como par ordenado cada número complejo representado en el siguiente planocartesiano.





5) Dada la siguiente gráfica, elegí a qué número complejo representa.



a) $3-2i$

b) $-3+2i$

c) $2-3i$

d) $-2+3i$

6) Resolvé:

$\sqrt{-25}$, e indicá, ¿cuál de las siguientes opciones es la respuesta correcta?

a) $\pm 5i$

b) 5

c) $5-i$

d) -5

7) ¿Cuál de los siguientes números complejos representa a un número imaginario puro?

a) $z=2+3i$

b) $z=2$

c) $z=3i$

d) $z=4+0i$

ASIGNATURA: MATEMÁTICA

Colegio: "Monseñor Scalabrini"



EJE III: "NÚMEROS REALES"

Revisión de propiedades de potenciación y radicación. Radicales. Simplificación. Extracción de factores. Operaciones con radicales: adición, sustracción, multiplicación y división. Racionalización de denominadores.

PROFESORA: Jofré Andrea y Spinelli Ludmila

NOMBRE Y APELLIDO DEL ALUMNO: _____

CURSO: 4° _____

AÑO:

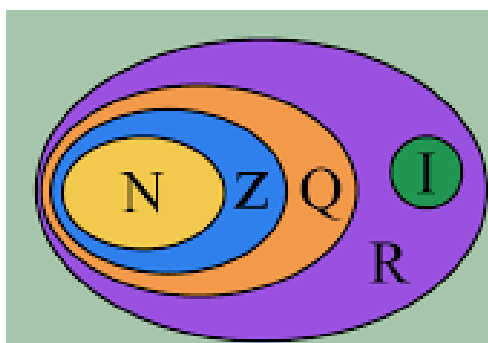
REPASAREMOS:

- EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES
- PROPIEDADES DE POTENCIACIÓN - RADICACIÓN
- FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS



¿Te acordás que en el Diagnóstico, repasamos los conjuntos numéricos? Los volveremos a repasar, ya que en las siguientes semanas veremos operaciones en uno de estos conjuntos.

Hasta el momento conocemos hasta el Conjunto de los Números Reales (R), pero al resolver operaciones con los conjuntos, solamente hemos llegado hasta el Conjunto de los Números Racionales (Q).



En las próximas semanas resolveremos operaciones con números pertenecientes al Conjunto de los Números Irracionales (I), es el conjunto que está con verde en la imagen anterior. Para esto, necesitamos recordar cuáles son los Números Irracionales, y las propiedades de potenciación y radicación que nos serán de mucha ayuda en este conjunto.

Es decir que por ahora solamente recordaremos, por un lado, cuáles son los Números Irracionales, por otro lado, las propiedades de potenciación y radicación y finalmente repasaremos cómo factorizar un número.



Números Irracionales:

Los números irracionales son aquellos que **NO** pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros (es decir, son aquellos que no pueden expresarse como una fracción). Otra característica importante, es que tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

Ejemplos de números Irracionales:

- ✓ 2,12547... los puntos suspensivos indica que este número continúa infinitamente. Observa que sus números decimales no se repiten (no es periódico). Esto hace que sea imposible, que podamos transformar esta expresión decimal en expresión fraccionaria.
- ✓ $\sqrt{2}$ todas las raíces no exactas, es decir las que no podemos resolver mentalmente. Si escribimos esta raíz en la calculadora, podemos observar que su cifra decimal es infinita (si bien tiene un último número porque es imposible escribir todos). Tampoco es posible encontrar su expresión fraccionaria.

A estas raíces que tienen solución, es decir que la calculadora me arroja un resultado, se las denomina **RADICALES**.

Los 2 ejemplos dados anteriormente, son números Irracionales pero solamente $\sqrt{2}$ es un número radical.

1) Dados los siguientes números, marcar con una cruz los que sean Irracionales y argumentar en cada uno (por qué si o por qué no es un número irracional).

a) $2,0\hat{3}$

d) π

g) $\sqrt[3]{4}$

b) 2,03

e) $-\frac{5}{2}$

h) $\sqrt{-8}$

c) 2,03...

f) $\sqrt{4}$

i) $\sqrt[3]{-8}$

2) De los números dados en el punto anterior, escribir cuáles son radicales.



Propiedades de la Potenciación:

- ✓ Potencia de exponente cero: Cualquier número elevado a la cero es uno. Ej:
- ✓ Potencia de un exponente negativo: se invierte la fracción elevada al exponente positivo.
Ej:
- ✓ Potencia de otra potencia: se multiplican los exponentes. Ej:
- ✓ Producto de potencias de igual base: se suman los exponentes, manteniendo la misma base.
Ej:
- ✓ Cociente de potencias de igual base: se restan los exponentes, manteniendo la misma base.
Ej:
- ✓ Propiedad distributiva: respecto de la multiplicación. Ej:
- ✓ Propiedad distributiva: respecto de la división. Ej:

Propiedades de la Radicación:

- ✓ Raíz de otra raíz: es otra raíz con el mismo radicando, y el índice es el resultado de multiplicar los índices dados. Ej:
- ✓ Propiedad distributiva: respecto de la multiplicación. Ej:
- ✓ Propiedad distributiva: respecto de la división. Ej:
- ✓ Simplificación del radical: el índice se puede simplificar con el exponente del radicando siempre y cuando éstos sean múltiplos. O si son iguales, se pueden cancelar directamente. Ej:
- ✓ La radicación se puede expresar como exponente fraccionario, donde en el numerador se coloca el exponente del radicando y en el denominador se coloca el índice de la raíz. Ej:

3) Resolver aplicando propiedades, siempre que sea posible (todas las mencionadas anteriormente):

a) $5^6 \cdot 5^3 \cdot 5 =$ b) $\frac{h^5}{h^4} =$ c) $\frac{a^3}{a^9 \cdot b^2} =$ d) $4^a \cdot 6^b \cdot 4^b \cdot 6^a =$

e) $\frac{x^4 \cdot y^9}{x^9 \cdot y^4} =$ f) $\frac{a^3 \cdot a}{a^2 \cdot a^5} =$ g) $((k^4)^3)^2 =$ h) $(x^3 \cdot (x^4)^3)^{\frac{6}{5}} =$

i) $2^{-5} \cdot 2 : 2^{-4} =$

j) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} =$

k) $[(-3)^3 : (-3)^{-3}]^{-2} =$

l) $(5 \cdot 4)^2 : (5^2 \cdot 4)^3 =$



Factorización de números:

Factorizar un número es descomponerlo en factores de números primos. Por ejemplo:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

se comienza a dividir por el número más pequeño posible, por eso empiezo dividiendo por 2 y no por 3 por ejemplo. La factorización termina cuando llego a 1.

4) Factorizar los siguientes radicando y simplificar cuando sea posible:

a) $\sqrt{64} =$

d) $\sqrt{343} =$

b) $\sqrt[6]{125} =$

e) $\sqrt[4]{729} =$

c) $\sqrt[3]{-8} =$

RADICALES. EXTRACCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL.

Se denomina radical a la raíz indicada de un número o de una expresión, siempre que esta tenga una solución real.

Dentro de un radical, existen factores, que pueden ser extraídos si el exponente de los mismos es mayor o a lo sumo igual que el índice de la raíz. Para extraer factores de un radical, debemos aplicar las propiedades de la potenciación y radicación, que repasamos previamente. Veamos algunos ejemplos:

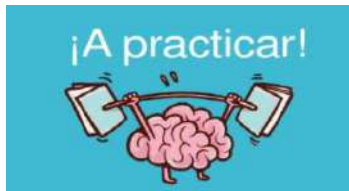
1) $\sqrt[3]{16x^7} =$

$$2) \sqrt{75 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot z} =$$

Cuando en el radicando tenemos factores con exponente 1 o menos al índice de la raíz, como es el caso de 3 y de z en el ejercicio 2, ya sabemos que no podremos formar grupos para simplificar.

$$3) \sqrt[5]{\frac{128}{243} \cdot y^5} =$$

$$4) \sqrt{\frac{8 \cdot x^4}{y^3 \cdot x^2}} =$$



Actividad 1: Factorizar siempre que sea posible y extraer factores del radical. Tener en cuenta todos los pasos realizados en la explicación anterior para la resolución de los ejercicios.

a) $\sqrt{32} =$

b) $\sqrt[3]{0,125} =$

c) $\sqrt{64 \cdot a^3} =$

d) $\sqrt[3]{2401 \cdot b^5 \cdot c} =$

e) $\sqrt{\frac{27 \cdot c^5}{343}} =$

f) $\sqrt[4]{\frac{81 \cdot a^4 \cdot b^8 \cdot c^{12}}{2401 \cdot c^4}} =$

g) $\sqrt[5]{\frac{32 \cdot a^6 \cdot b^8}{729 \cdot b^3 \cdot c^3}} =$

h) $\sqrt{\frac{128 \cdot a^5 \cdot b^9 \cdot c^{10}}{9 \cdot b \cdot c^{11}}} =$

OPERACIONES CON RADICALES: ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.

Para efectuar las operaciones con radicales, es necesario comprender a que llamamos **radicales semejantes** y a partir de ahí ver como procedemos con ellos.

Radicales semejantes: dos o mas radicales son semejantes, cuando tienen igual índice y el mismo radicando. Veamos algunos ejemplos:

- $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$
- $-2\sqrt[3]{2}$ y $4\sqrt[3]{2}$
- $3\sqrt[4]{x^3}$; $-8\sqrt[4]{x^3}$ y $\sqrt[4]{x^3}$
- $\sqrt[4]{x^4}$ y $\sqrt[3]{x^4}$ no son semejantes, pues sus radicandos son iguales pero no sus índices.

Cuando entre una letra y un número o entre dos letras no se indica una operación, se debe interpretar que existe un signo de multiplicación.

$$2x = 2 \cdot x$$

Para sumar o restar radicales, estos deben ser semejantes. De no ser así, se aplicará primero el procedimiento de extracción de factores y si se obtienen términos semejantes, se procederá con la operación indicada.

Ejemplos:

1) $6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} =$

2) $\overbrace{5\sqrt{6} - 9\sqrt{2}} + \overbrace{3\sqrt{6} + 4\sqrt{2}} =$

Sumamos y restamos los factores que multiplican los radicales semejantes.

Existen casos, en los cuáles ciertos radicales son semejantes luego de llevarlos a su **mínima expresión**

3) $3\sqrt{2} - 5\sqrt{32} + 7\sqrt{8} - 9\sqrt{50} =$

4) $4\sqrt{3} - 6\sqrt[4]{25} - 8\sqrt{27} + \sqrt{20} =$

Actividad 2: Resolver las siguientes sumas y restas con radicales, realizando todos los procedimientos y cálculos necesarios.

a) $-3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{5} =$

b) $2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} =$

c) $-\sqrt{3} + \sqrt{3} - 5\sqrt{3} =$

d) $2\sqrt{b} - 3\sqrt{a} - 2\sqrt{b} - \sqrt{a} =$

e) $5\sqrt{a} - 6\sqrt{b} - \sqrt{b} =$

f) $\sqrt{5} + \sqrt{8} - \sqrt{32} =$

g) $3\sqrt{7} - 3\sqrt{28} + \sqrt{63} =$

h) $-4\sqrt{\frac{1}{27}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - 2\sqrt{\frac{1}{243}} =$

OPERACIONES CON RADICALES: MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN.

Para poder efectuar cualquier multiplicación o división de radicales, es necesario que estos tengan el mismo índice. Si no es así, debemos encontrar el mínimo común índice y los radicales equivalentes.

❖ Radicales con el mismo índice

La operatoria con radicales, cumple con las siguientes propiedades.

➤ Propiedad distributiva de la multiplicación y división respecto de la suma y resta.

$$a \cdot (b \pm c) = (b \pm c) \cdot a = ab \pm ac$$

$$(b \pm c) : a = b : a \pm c : a$$

$$\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{27}) =$$

$$(\sqrt{125} - \sqrt{20}) : \sqrt{5} =$$

- Cuadrado de un binomio y diferencia de cuadrados.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 =$$

$$(\sqrt{10} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{7}) =$$

❖ Radicales con distinto índice

Para que los índices de dos o mas radicales sean iguales, se debe calcular el mcm de los índices de los radicales dados, obteniendo así el **MÍNIMO COMÚN ÍNDICE**.

❖ $\sqrt[4]{a^2} y \sqrt[6]{x}$ → Debemos encontrar el mínimo común múltiplo entre los índices:
mcm(4;6) = , por lo tanto ambos radicales deben tener índice

❖ $\sqrt[4]{a^2} =$ = $y \sqrt[6]{x} =$ =

↓

Multiplicamos al índice 4, por 3 y obtenemos un índice 12. Por lo tanto, como aplicamos el índice, lo mismo hacemos con el exponente.

→

Para obtener índice 12, multiplicamos al índice 6, por 2. Luego el exponente lo debemos multiplicar por este mismo valor.

Debemos seguir los siguientes pasos:

1º) Encontrar el mínimo común múltiplo entre los índices dados.

2º) Hallamos radicales equivalentes a los dados, que tengan el índice encontrado.

3º) Multiplicamos o dividimos los radicales obtenidos, ya que hemos conseguido que todos tengan el mismo índice.

Ejemplos:

a) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[4]{3} =$ → Buscamos el m.c.m. (6;4) =

→ Amplificamos índices y exponentes

→ Aplicamos recíproca de la distributiva

b) $\frac{\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt[5]{m^2}} =$

→ Buscamos el m.c.m.
(4;5)=

→ Amplificamos índices y exponentes

→ Aplicamos recíproca de la distributiva y simplificamos



c) $\frac{\sqrt[4]{18}}{\sqrt{15}} =$

→ Factorizamos los radicandos y encontramos el m.c.m. (4;2)=

→ Amplificamos índice y exponentes sólo del denominador ya que el numerador tiene el índice que necesitamos

→ Aplicamos recíproca de la distributiva y simplificamos

VAMOS A PRACTICAR!!!

Actividad 3: Dados los siguientes radicales, encontrar el mínimo común índice y aplicar de ser posible.

a) $\sqrt{3^3} y \sqrt[4]{3} :$

b) $\sqrt[3]{5^2} y \sqrt{5} :$

c) $\sqrt[3]{a^2} y \sqrt[5]{b^4} :$

d) $\sqrt[7]{a^2 b^3} y \sqrt{5c} :$

Recordemos que el **mínimo común múltiplo** entre dos o más números, lo obtenemos al factorizar los números, y **multiplicar los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.**

Actividad 4: Resolver las siguientes operaciones, realizando todos los procedimientos necesarios.

a) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) =$

g) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt[3]{2x^2} =$

b) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{32} - \sqrt{128}) =$

h) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2} \cdot \sqrt[8]{x} =$

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 =$

i) $\sqrt[5]{xy} \cdot \sqrt[4]{y^2x^3} =$

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{27}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{27}) =$

j) $\sqrt[3]{4y^2} : \sqrt[4]{8xy} =$

e) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}} =$

k) $\sqrt{5x} : \sqrt[5]{x^4} =$

f) $\frac{\sqrt{a^5b} - \sqrt{ab^3}}{\sqrt{a}} =$

l) $\sqrt[3]{27x^2y^3} : \sqrt[9]{3y^2x} =$

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Racionalizar el denominador de una fracción es transformarlo en un número racional; por lo tanto, siempre que en el mismo aparezcan radicales irracionales, se debe hallar una fracción equivalente a la dada con denominador racional. Es decir, lo que se busca hacer es eliminar cualquier raíz que aparezca en el denominador de la expresión.

$$\frac{5}{\sqrt{15}}$$

En este caso se puede racionalizar el denominador, ya que en el existe una raíz cuadrada.

$$\frac{3\sqrt{6}}{5}$$

Aquí el denominador ya está racionalizado, ya que 5 es un número racional.

$$\frac{3\sqrt{6}}{5\sqrt[3]{5}-3}$$

Se puede racionalizar esta expresión, ya que en el denominador existe una raíz cubica.

- ❖ **1° caso:** En el denominador hay un único radical con índice igual a 2. Para racionalizar este tipo de expresiones, se debe multiplicar (al numerador y al denominador) por la misma raíz que tiene el denominador.

Ejemplos:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} =$



Multiplicar numerador y denominador por la misma raíz cuadrada que queremos eliminar del denominador, en este caso $\sqrt{5}$, luego simplificamos.

b) $-\frac{3}{\sqrt{3}} =$



Multiplicamos por $\sqrt{3}$ al numerador y al denominador y realizamos el producto.



Simplificamos para conseguir la racionalización del denominador

- ❖ **2° caso:** En el denominador hay un único radical con índice mayor a 2. Para racionalizar este tipo de expresiones, se debe multiplicar por una raíz que tenga el mismo índice que la raíz del denominador, que el radicando tenga los mismos factores, pero con exponente igual a la diferencia entre el índice y el exponente dado.

Ejemplos:

c) $\frac{3}{\sqrt[5]{2^2}} =$



Realizamos la diferencia entre el índice y el exponente: $5-2=3$. Por lo tanto, multiplicamos por una raíz con igual índice (5), igual factor (2) y exponente igual a esta diferencia (3)



Aplicamos propiedad de radicación y potenciación



Podemos simplificar y hemos racionalizado el denominador

$$d) \frac{4}{\sqrt[4]{a^3 b^2}} =$$



Realizamos la diferencia entre el índice y los exponentes. Considerando el factor **a**: $4-3=1$; considerando el factor **b**: $4-2=2$. Por lo tanto, multiplicamos por:



Aplicamos propiedad de radicación y potenciación



Podemos simplificar y hemos racionalizado el denominador

- ❖ **3° caso:** el denominador es una suma o resta de uno o dos radicales de índice 2. Para racionalizar este tipo de expresiones se busca resolver mediante diferencia de cuadrados (o expresión conjugada), es decir, se debe aplicar el producto de una suma de dos términos por su diferencia.

Ejemplos:

$$e) \frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} =$$



En este caso, como en el denominador hay dos términos, multiplicamos por el mismo denominador cambiándolo sólo el signo intermedio



Aplicamos distributiva de la multiplicación en el numerador. En el denominador aplicamos diferencia de cuadrados y simplificamos.



Luego de resolver, distribuimos el denominador a cada término del numerador.

$$f) \frac{\sqrt{3}-1}{5+\sqrt{6}} =$$



Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador que queremos racionalizar.



Aplicamos distributiva de la multiplicación en el numerador. En el denominador aplicamos diferencia de cuadrados y simplificamos.



Luego de resolver, distribuimos el denominador a cada término del numerador.

VAMOS A PRACTICAR!!!

Actividad 5: Racionalizar las siguientes expresiones. Indicar de que caso se trata.



a) $\frac{1}{\sqrt{7}} =$

f) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^4}} =$

b) $-\frac{5}{\sqrt{3}} =$

g) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} =$

c) $\frac{12x}{\sqrt{2x}} =$

h) $\frac{7+\sqrt{3}}{7-\sqrt{3}} =$

d) $\frac{3a}{\sqrt{3a}} =$

i) $\frac{1}{\sqrt{2}+3} =$

e) $\frac{9}{\sqrt[3]{2}} =$

j) $\frac{-7}{5-\sqrt{3}} =$

TRABAJO PRÁCTICO N°3

“NÚMEROS IRRACIONALES. OPERACIONES CON RADICALES. RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES”

Aspectos que se tendrán en cuenta (se descontará el siguiente porcentaje de la nota obtenida):

- ✓ Cumplimiento en la forma de presentar el trabajo según lo solicitado: resolución en hoja aparte, trabajar con lapicera, en la fecha estipulada, ser prolijo y ordenado. (15%)
- ✓ Presentación de TODOS los cálculos y procedimientos correspondientes. (15%)

PUNTAJE OBTENIDO: _____ de 220 puntos

NOTA FINAL: _____

- 1) Factorizar siempre que sea posible y extraer factores del radical.

(20p)

a) $\sqrt[4]{234.a^3.b^7} =$

b) $\sqrt[3]{\frac{512.a^2.b^3.c^4}{125.d^5}} =$

- 2) Resolver las siguientes sumas y restas con radicales, realizando todos los procedimientos y cálculos necesarios.

(40p)

a) $-3\sqrt{\frac{1}{2}} - 5\sqrt{\frac{1}{32}} + \sqrt{\frac{1}{8}} =$

b) $\sqrt{108} + \sqrt{12} - \sqrt{48} =$

c) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{5} - 3 \cdot \sqrt[3]{40} - 2 \cdot \sqrt[3]{-5} =$

d) $\sqrt{\frac{5}{18}} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt[6]{\frac{125}{8}} + \sqrt{\frac{5}{2}} =$

3) Resolver las siguientes operaciones.

(50p)

a) $\sqrt[3]{a \cdot b^2} \cdot \sqrt[5]{a^2 \cdot b^3} \cdot \sqrt[15]{a^4} =$

b) $\frac{\sqrt[3]{9x}}{\sqrt[4]{27x^2}} =$

c) $\sqrt{4x} \cdot \sqrt[3]{4x^2} \cdot \sqrt[6]{16x^3} =$

d) $(\sqrt{7} - \sqrt{8}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{8}) =$

e) $\left[-62 + (2\sqrt{3} - 5\sqrt{2})^2 \right] : \sqrt[3]{12} =$

4) Racionalizar las siguientes expresiones.

(50p)

a) $\frac{5b}{7\sqrt{3b}} =$

b) $\frac{7}{3\sqrt[6]{7^2a^3}} =$

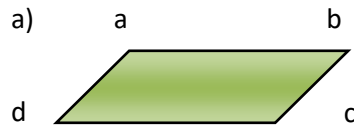
c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[5]{81b^4}} =$

d) $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-5} =$

e) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{8}}{\sqrt{12}-\sqrt{2}} =$

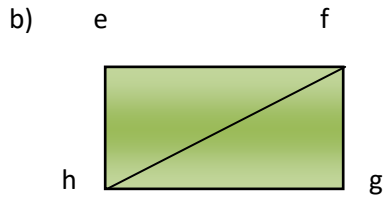
- 5) Hallen el perímetro de cada una de las siguientes figuras. Todas las medidas están dadas en centímetros.

(30p)



$$|\overline{ab}| = 3\sqrt{5}$$

$$|\overline{bc}| = \sqrt{5}$$



$$|\overline{ef}| = \sqrt{3}$$

$$|\overline{fh}| = \sqrt{15}$$

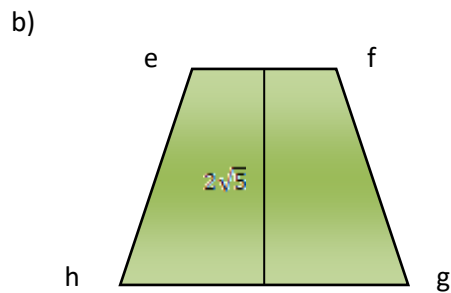
- 6) Hallen el valor exacto del área de las siguientes figuras. Todas las medidas están dadas en centímetros.

(30p)



$$|\overline{ab}| = 1 + \sqrt{27}$$

$$|\overline{bc}| = \sqrt{3}$$



$$|\overline{ef}| = \sqrt{5}$$

$$|\overline{hg}| = \sqrt{20}$$



Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

"ESTADÍSTICA"



PROFESORA: ANDREA JOFRÉ

NOMBRE Y APELLIDO DEL ALUMNO: _____

CURSO: 4° _____

AÑO:

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA:

ESTADÍSTICA: es la rama de la Matemática que se ocupa de la recolección, organización y análisis de datos para obtener determinada información. Los datos se recolectan, en algunos casos, a través de encuestas y se los puede organizar a través de tablas y gráficos para poder entenderlos y sacar conclusiones.

POBLACIÓN Y MUESTRA: la **población** es el conjunto de individuos (personas, animales, plantas, artefactos, etc.) que se pretende estudiar estadísticamente. Cuando es difícil estudiar toda la población, se selecciona una parte de ella denominada **muestra**. La muestra debe ser representativa, es decir, debe elegirse de manera tal que del estudio estadístico se obtengan resultados muy próximos a los que se obtendrían con toda la población.

VARIABLE: es cada uno de los temas que se estudia de una población o muestra. Las variables se clasifican en:

- **Cualitativas:** se miden a partir de datos **no numéricos**.
- **Cuantitativas:** se miden a partir de datos **numéricos**. A su vez éstas se clasifican en **discretas** (si toma valores enteros) o **continuas** (si toma valores decimales)

Ejemplos:

- a) Se quiere saber el lugar preferido para viaje de egresados de 80 alumnos del último año de la secundaria de una escuela.

Población: los 80 alumnos del último año de la escuela secundaria.

Variable: lugar preferido para viajar.

Tipo de variable: cualitativa

- b) Se desea realizar un estudio sobre las estaturas de los alumnos de 5° año.

Población: los alumnos de 5° año.

Variable: estatura de los alumnos.

Tipo de variable: cuantitativa continua

- c) Se pretende averiguar la cantidad de hijos que tienen las personas que trabajan en una determinada empresa.

Población: las personas que trabajan en la empresa.

Variable: cantidad de hijos.

Tipo de variable: cuantitativa discreta

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

ORGANIZACIÓN DE DATOS

Los datos obtenidos a partir de un relevamiento o encuesta, se ordenan en forma de tablas llamadas **Tablas de distribución de frecuencias**.

Variable	fa	fr	fr %

En la columna de:

- Variable: se debe poner cuál es la variable de estudio y los valores que toma.
- **fa**: es la **frecuencia absoluta** de la variable, es decir la cantidad de veces que se repite ese valor de la variable. La suma de las frecuencias absolutas debe ser igual a total de datos que se obtuvieron en el relevamiento.
- **fr**: es la **frecuencia relativa** de la variable, y se obtiene dividiendo cada frecuencia absoluta por el total de datos que se tienen. La suma de las frecuencias relativas debe dar 1 o cercano a uno (0,99 o 0,98 o 1,01).
- **fr %**: es multiplicar por 100 cada valor de la frecuencia relativa.

Ejemplo:

Los siguientes datos representan el número de calzado de 10 chicos: 35; 38; 40; 40; 35; 36; 36; 36; 39; 37

La tabla de distribución de frecuencias sería:

Variable: número de calzado	fa	fr	fr %
35	2	$2:10 = 0,2$	$0,2 \cdot 100 = 20$
36	3	$3:10 = 0,3$	$0,3 \cdot 100 = 30$
37	1	0,1	10
38	1	0,1	10
39	1	0,1	10
40	2	0,2	20
Total: 10		Total: 1	Total: 100%

Nombre y Apellido:
ACTIVIDADES



NIVEL SECUNDARIO

Año:

1) Clasificar las siguientes variables en cualitativa o cuantitativas: discretas o continuas.

- a) Cantidad de ganado vacuno en las provincias de la Mesopotamia Argentina.
- b) Religión de los alumnos de la escuela San Pedro Nolasco.
- c) Sueldo de los empleados de una empresa.
- d) Cantidad de películas nacionales estrenadas durante un año.
- e) Color de pelo de los alumnos de 4°.
- f) Estado civil de los habitantes de la ciudad de Mendoza.
- g) Puntaje obtenido por los alumnos ingresantes a la facultad de medicina.
- h) Mes de nacimiento de los alumnos de 4°.

2) Se desea realizar un estudio sobre las carreras que seguirán estudiando los alumnos de 4°, luego de finalizar la secundaria. Determinar:

- a) Población:.....
- b) Variable:.....
- c) Tipo de variable:.....

3) Martín hizo una encuesta entre sus compañeros del colegio acerca de cuál es el club favorito de fútbol de cada uno de ellos y obtuvo los siguientes datos.

River, River, River, Boca, Boca, Racing, Independiente, Racing, River, Boca, River, River, Boca, Boca, San Lorenzo, Huracán, Racing, Independiente, Boca, San Lorenzo, Racing, San Lorenzo, Gimnasia, Vélez, River, River, Boca, San Lorenzo

- a) Completar la tabla

Variable:	fa	fr	fr%
River			
Boca			
Racing			
San Lorenzo			
Independiente			
Otros			

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

b) ¿Cuál es la variable de estudio? Clasificarla en cuantitativa o cualitativa.

c) ¿Cuál es el club con mayor número de simpatizante?

d) ¿Cuántos clubes tienen por lo menos tres simpatizantes? ¿Cuáles?

e) ¿Qué porcentaje de simpatizantes son de Boca?

f) ¿Qué representa el 7%?

4) Las siguientes son las notas obtenidas en la evaluación de Matemática.

10; 9; 9; 8; 8; 8; 5; 5; 4; 4; 10; 8; 8; 6; 6; 6; 6; 8; 7; 7; 10; 9; 3; 6; 6; 6; 10; 5

a) Completar la tabla.

Variable:	fa	fr	fr %

b) ¿Cuál es la variable de estudio? Clasificarla en cuantitativa o cualitativa.

c) ¿Cuántos alumnos hay en el curso?

d) ¿Cuántos alumnos aprobaron la evaluación?

e) ¿Qué representa el 25 %?

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

Tablas de distribución de frecuencias para variables **cuantitativas continuas**

Hasta el momento hemos visto cómo hacer tablas para variables cualitativas o cuantitativas discretas.

En la siguiente teoría veremos cómo armar tablas de distribución de frecuencias para variables cuantitativas continuas (son las que toman valores decimales).

Cuando los valores que toma la Variable son números decimales, éstos se pueden agrupar en **intervalos de clases**.

Los intervalos de clase, son intervalos en los que se divide el número total de datos.

Para armar los intervalos de clase se debe calcular:

1° Rango de los datos: es la resta del mayor dato que se tiene con el menor de los datos.

2° Se debe determinar la **cantidad intervalos** que se quiere usar (por lo general siempre es 5 o más) y determinar la **amplitud** de los intervalos. La fórmula para calcular la amplitud es: dividir el rango con el número de intervalos.

Por ejemplo:

Los siguientes números representan las alturas de 40 jugadores de básquet.

1,75	2,01	1,98	1,80	2,05	1,78	1,83	1,70	1,94	1,88
2,02	1,91	1,87	1,76	1,79	1,96	1,82	1,90	1,87	2,04
1,81	1,80	1,79	1,76	2,02	1,96	1,80	1,75	1,92	1,77
1,88	1,98	1,84	2,01	1,75	1,99	1,76	1,97	2,00	1,81

1° Tenemos que calcular el **rango**:

Si vemos en la tabla el mayor valor es 2,05 y el menor es 1,70, entonces el rango es:

$$\text{Rango} = 2,05 - 1,70 = 0,35$$

2° Determinar la amplitud, considerando una cantidad de 7 intervalos, entonces tenemos:

$$\text{Amplitud} = 0,35 \text{ (rango)} : 7 \text{ (cantidad de intervalos)} = 0,05$$

Para armar los intervalos empezamos tomando el menor valor que había en las alturas de los jugadores y le sumamos la amplitud que nos dio 0,05. Entonces el primer intervalo va a ser [1,70 ; 1,75). Este intervalo muestra que en él entran todas las alturas que van desde 1,70 hasta 1,74. Al terminar el intervalo con un paréntesis eso indica que el 1,75 no entraría en ese intervalo, sino en el siguiente.

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

El segundo intervalo empezará con 1,75 y a ese número se le suma la amplitud que es 0,05: [1,75 ; 1,80) Este intervalo indica que en él entran todas las alturas que van desde 1,75 hasta 1,79. Al terminar el intervalo con un paréntesis eso muestra que el 1,80 no entraría en ese intervalo, sino en el siguiente.

Los siguientes intervalos se obtienen a medida que se le va sumando 0,05 al número final de cada intervalo.

Por lo tanto, los 7 intervalos que queremos serán:

[1,70 ; 1,75)	[1,90 ; 1,95)
[1,75 ; 1,80)	[1,95 ; 2,00)
[1,80 ; 1,85)	[2,00 ; 2,05]
[1,85 ; 1,90)	en este último va corchete para indicar que el 2,05 entraría en ese intervalo, ya que es el último

Una vez que tenemos los intervalos, podemos armar la tabla de distribución de frecuencias.

Variable: altura	fa	fr	fr%	Punto medio de cada intervalo
[1,70 ; 1,75)	Contamos cuántos jugadores tienen alturas que van de 1,70 a 1,74 (recordar que el paréntesis indica que no lo tienen en cuenta, por lo tanto, el que mida 1,75 entra en el intervalo de abajo) 1	0,025	2,5	Para calcularlo debemos sumar los dos números y al resultado, dividirlo por dos. Así encontraremos el valor que está en el medio entre esos dos números. $(1,70 + 1,75) : 2 = 1,725$
[1,75 ; 1,80)	Contamos cuántos jugadores tienen alturas que van de 1,75 a 1,79 (recordar que el paréntesis indica que no lo tienen en cuenta, por lo tanto, el que mida 1,80 entra en el intervalo de abajo) 10	0,25	25	Para calcularlo debemos sumar los dos números y al resultado, dividirlo por dos. Así encontraremos el valor que está en el medio entre esos dos números. $(1,75 + 1,80) : 2 = 1,775$

Nombre y Apellido:	NIVEL SECUNDARIO			Año:
[1,80 ; 1,85)	8	0,2	20	$(1,80 + 1,85) : 2 = 1,825$
[1,85 ; 1,90)	4	0,1	10	$(1,85 + 1,90) : 2 = 1,875$
[1,90 ; 1,95)	4	0,1	10	$(1,90 + 1,95) : 2 = 1,925$
[1,95 ; 2,00)	6	0,15	15	$(1,95 + 2,00) : 2 = 1,975$
[2,00 ; 2,05]	7	0,175	17,5	$(2,00 + 2,05) : 2 = 2,025$

Total: 40 Total: 1 Total: 100

Ponemos los intervalos calculados anteriormente

Se calcula igual que en el trabajo anterior, dividiendo cada fa con el total de jugadores.

Se calcula igual que en el trabajo anterior, multiplicamos por 100 a la fr de cada intervalo.

A partir de la tabla podemos responder algunas preguntas:

- a) ¿Cuántos jugadores miden entre 1,70 y 1,90m? **Hay 23 jugadores entre esas alturas.**
- b) ¿Qué porcentaje de jugadores miden menos de 1,85m? **El 47,5%**
- c) ¿Qué representa el 2,5%? **El porcentaje de jugadores que miden entre 1,70 y 1,75m**



Otro ejemplo:

Se averiguó en diferentes librerías el precio de un block de hojas y los datos obtenidos fueron los siguientes:

39,40	47	37,90	56	43,85	49	50	61	51,50	45,25
53	39,90	43,50	50	60	47,70	51,90	42,50	44	58
33,50	43,50	41,30	58	44,50	48	61	43,80	53	45,75
40,80	54,50	39,80	47,90	33,50	45,50	47,60	42,90	45,50	48

Rango =

Amplitud (tener en cuenta 5 intervalos) =

Los intervalos serán:

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

Una vez que tenemos los intervalos, podemos armar la tabla de distribución de frecuencias.

Variable: precio de block	fa	fr	fr%	Punto medio de cada intervalo

Total:

Total:

Total:

- a) ¿Cuántas librerías tienen los blocks a menos de \$ 50?
- b) ¿Qué porcentaje de librerías los tienen a un precio entre \$ 44,50 y \$50?
- c) ¿Qué representa el 15%?



ACTIVIDADES:

- 1) Se tomaron al azar 20 personas, y se midieron sus estaturas. Los resultados obtenidos en metros son:

1,56 1,61 1,81 1,76 1,58 1,62 1,77 1,69 1,59 1,75
1,78 1,68 1,79 1,82 1,66 1,70 1,69 1,72 1,59 1,72

- a) Completar la tabla siguiente.

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

Variable: altura	fa	fr	fr%	Punto medio de cada intervalo
[1,56; 1,62)				
[1,62; 1,68)				
[1,68; 1,74)				
[1,74; 1,80)				
[1,80; 1,86)				

- b) ¿Qué representa el 30%?
- c) ¿Cuántas personas miden más de 1,74m?
- d) ¿Qué porcentaje de personas miden entre 1,56m y 1,68m?
- 2) Una compañía telefónica registra la duración (en minutos) de las llamadas que recibe en su call center.

0,1	4,8	5,5	9,4
3,4	5,3	3,9	0,4
2,6	4,5	3,3	1,6
5,9	8,1	9,3	5,6
9,9	7,2	4,8	5,1

- a) Calcular el Rango: buscar el mayor y menor valor y restarlos.
- b) Calcular la Amplitud de los intervalos: al rango lo dividen por 7 intervalos.
- c) Armar los 7 intervalos.
- d) Completar la tabla.

Variable: duración de llamada	fa	fr	fr%	Punto medio de cada intervalo

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

e) ¿Qué cantidad de llamadas han durado entre 2,9 minutos y 7,1 minutos?

f) ¿Qué representa el 7 de la fa?

g) ¿Qué representa el 5%?

ORGANIZACIÓN DE DATOS EN GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Hemos visto que los datos obtenidos a partir de un relevamiento o encuesta, se pueden ordenar en Tablas de distribución de frecuencias. En este apartado veremos cómo organizar esos datos, en **GRÁFICOS ESTADÍSTICOS**.

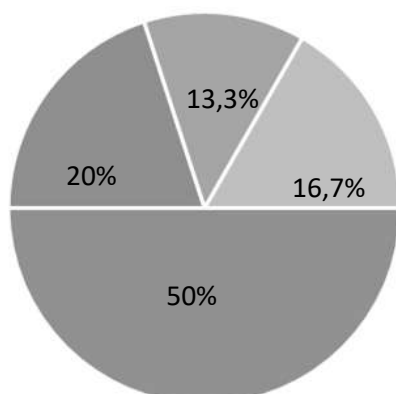
En muchas situaciones, los datos se pueden leer con mayor facilidad a través de gráficos. El tipo de gráfico puede variar según la información que se quiere brindar.

Los gráficos que más se utilizan son:

Gráfico Circular o de Tortas: se utiliza para mostrar los porcentajes que corresponden a cada dato de la variable con respecto al total. Para ello, se divide al círculo en sectores circulares que representan la parte del giro que corresponde a la $fr\%$ de cada valor de la variable. Cada división del círculo es el ángulo correspondiente a la $fr\%$, que se calcula haciendo: $fr \cdot 360^\circ$

Ejemplo

Variable: mascota preferida	fa	fr	fr%	Ángulo correspondiente $fr \cdot 360^\circ$
Aves	10	0,167	16,7	$0,167 \cdot 360^\circ = 60,1^\circ$
Peces	8	0,133	13,3	$0,133 \cdot 360^\circ = 47,9^\circ$
Gato	12	0,2	20	$0,2 \cdot 360^\circ = 72^\circ$
Perro	30	0,5	50	$0,5 \cdot 360^\circ = 180^\circ$
Total: 60		Total: 1	Total: 100	Total: 360°



A partir de estos ángulos obtenidos, confeccionamos el gráfico circular. Se debe dibujar un círculo, marcar el centro y comenzar a marcar, con un transportador (el que mide ángulos) los ángulos, uno a continuación del otro.

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

Gráfico de barras: estos gráficos se utilizan únicamente para **variables cualitativas o cuantitativas discretas**. Se construyen rectángulos todos del mismo ancho, cuya altura representa la **fa** de cada valor de la variable. Los rectángulos se dibujan en un sistema de ejes cartesianos, donde en el eje x (eje horizontal) van los valores de la variable, separados todos a una misma distancia (cada un cuadrito, cada dos cuadritos de la hoja cuadrículada). En el eje y (eje vertical) van los valores de la **fa**, también todos separados a la misma distancia y respetando la escala.

Ejemplo

a) Para variable cuantitativa discreta.

La siguiente tabla muestra las edades de los chicos que forman un grupo de fútbol.

Variable: edad	fa
12	4
13	6
14	9

Para hacer un gráfico de barras sólo utilizamos las dos primeras columnas de la Tabla de distribución, por eso no es necesario completarla con las demás columnas.

Realizar el gráfico en una hoja a cuadro y pegarlo a continuación.

b) Para variable cualitativa.

Variable: opinión sobre un nuevo gusto de chocolate	fa
Excelente	2
Bueno	10
Regular	4
Malo	4

Para hacer un gráfico de barras sólo utilizamos las dos primeras columnas de la Tabla de distribución, por eso no es necesario completarla con las demás columnas.

Realizar el gráfico en una hoja a cuadro y pegarlo a continuación.

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

TRABAJO PRÁCTICO N° : DATOS ESTADÍSTICOS, FRECUENCIAS Y GRÁFICOS.

Condición: Realizar un gráfico de cada tipo.

- 1) Se realizó una encuesta para saber cuánto tiempo al día miran televisión un grupo de personas que tienen entre 20 a 25 años.

Variable: tiempo en minutos	fa
[0 ; 45)	10
[45 ; 90)	30
[90 ; 135)	28
[135 ; 180)	15

- a) Confeccionar la tabla de frecuencias.
- b) Realizar el gráfico correspondiente.

- 2) Se hizo un relevamiento acerca de la cantidad de integrantes de las familias de los empleados de una empresa. La información obtenida se encuentra organizada en la siguiente tabla:

Variable: cantidad de integrantes en la familia	fa
1	12
2	15
3	33
4	39
5	36
6	15

- a) Confeccionar la tabla de frecuencias.
- b) Realizar el gráfico correspondiente.

- 3) Luego de la clase de gimnasia se le tomó las pulsaciones por minuto a un grupo de 20 chicas.

Variable: pulsaciones por minuto	fa
[70 ; 75)	5
[75 ; 80)	7
[80 ; 85)	6
[85 ; 90)	2

- a) Confeccionar la tabla de frecuencias.
- b) Realizar el gráfico correspondiente.

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

- 4) La siguiente tabla muestra la cantidad de camisas vendidas en un negocio, de acuerdo a los talles.

Variable: talle de camisa	fa
37	90
39	38
42	105

- a) Confeccionar la tabla de frecuencias.
- b) Realizar el gráfico correspondiente.

- 5) Se encuestó a 120 personas para saber el destino preferido para irse de vacaciones.

Variable: destino Preferido	fa
Norte Argentino	35
Sur Argentino	27
Buenos Aires	16
Litoral	18
Extranjero	24

- a) Confeccionar la tabla de frecuencias.
- b) Realizar el gráfico correspondiente.

- 6) La siguiente tabla muestra el deporte preferido por 45 personas.

Variable: deporte preferido	fa
Básquet	10
Fútbol	15
Vóley	8
Natación	12

- a) Confeccionar la tabla de frecuencias.
- b) Realizar el gráfico correspondiente.

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Si repasamos un poco lo que hemos ido haciendo hasta el momento, vemos que cuando queremos hacer estadística, es decir hacer un estudio o averiguar algo, lo primero que hacemos es la recolección de datos a través de una encuesta. Luego, esos datos los organizamos en tablas de distribución de frecuencias o en gráficos estadísticos, los cuales nos permiten tener una mirada rápida de la información y así poder sacar conclusiones y responder a diversas preguntas.

Pero otra manera de tener la información resumida o sintetizada, como lo muestran las tablas y los gráficos, es encontrar un valor que de alguna manera represente a todos los valores de la variable, volcados en las tablas.

Tal valor es un parámetro, es decir es un número que se obtiene a partir de los datos de una población o muestra, que sirven para sintetizar la información dada por una tabla o por una gráfica.

Los parámetros más usados son:

- Las medidas de tendencia central: promedio o media, mediana y moda.
- Las medidas de dispersión.

PROMEDIO o MEDIA es el valor obtenido al sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número total de datos. El símbolo del promedio de los datos es $\bar{X}$.

Si se quiere calcular el promedio para datos que no están organizados en tablas se debe aplicar la siguiente fórmula:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N}$$

Donde cada $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son los valores de la variable y N es el total de datos que se tiene.

Por ejemplo

Los pesos de seis amigos son: 84, 91, 72, 68, 87 y 78 kg.

Hallar el peso Promedio.

$$\bar{X} = \frac{78 + 91 + 72 + 68 + 87 + 78}{6} = 79 \text{ Kg}$$

Se suman todos los pesos, aunque algunos se repitan y se lo divide por 6, ya que son 6 la cantidad de datos que se tiene.

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

- Si los datos se encuentran agrupados en una tabla de distribución de frecuencias, el promedio se calcula multiplicando cada valor de la variable por la fa (frecuencia absoluta, que indica la cantidad de veces que se repite ese valor), luego sumamos todas esas multiplicaciones y dividimos por la cantidad total de datos.

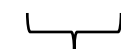
Por ejemplo

Variable: edad	fa
10	5
12	9
14	26
16	21
18	26
20	13

Total: 100

Para saber cuál es la edad promedio de este grupo de personas, debemos hacer la siguiente cuenta:

$$\bar{X} = \frac{10 \cdot 5 + 12 \cdot 9 + 14 \cdot 26 + 16 \cdot 21 + 18 \cdot 26 + 20 \cdot 13}{100} = 15,86 \cong 16$$



Valor de la variable
multiplicado por su fa



Símbolo que
significa aproximado

Por lo tanto, el promedio de edad, en este grupo de 100 personas es de 16 años, aproximadamente

- Si la variable es cuantitativa continua y los datos están organizados en una tabla de distribución de frecuencias, el promedio se calcula multiplicando cada **Punto Medio** por su fa correspondiente, luego sumamos todas esas multiplicaciones y dividimos por la cantidad total de datos.

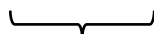
Por ejemplo

Variable: tiempo en minutos	fa	Punto Medio
[5 ; 10)	10	7,5
[10; 15)	14	12,5
[15 ; 20)	18	17,5
[20 ; 25)	8	22,5

Total: 50

Para saber cuál es el tiempo promedio que tarda este grupo de personas para bañarse, debemos hacer la siguiente cuenta:

$$\bar{X} = \frac{7,5 \cdot 10 + 12,5 \cdot 14 + 17,5 \cdot 18 + 22,5 \cdot 8}{50} = 14,9 \cong 15$$



Punto medio de la variable
multiplicado por su fa

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

Por lo tanto, el promedio de tiempo que tardan estas 50 personas para bañarse es de 15 min.

MEDIANA es el valor que ocupa la posición central, es decir el lugar del medio. Para calcular la Mediana se deben ordenar los datos de menos a mayor y buscar el número que queda en el medio. Si hay dos números que quedan en el medio, se debe sacar el promedio de los dos. La mediana se la simboliza como **Me**.

Por ejemplo

a) Supongamos que tenemos los siguientes valores de variable:

32; 29; 42; 34; 34; 40; 28

Para calcular la Mediana, Me, debemos ordenar los números de menos a mayor, quedando:

28; 29; 32; **34**; 34; 40; 42 y buscamos el número que está en el medio

Es el número que está en el medio, ya que a su izquierda hay 3 números y a su derecha, también hay 3 números.

Por lo tanto, la **Me = 34**

b) Calculemos la mediana para los siguientes datos:

28; 30; 28; 28; 28; 28; 29; 35; 29; 30

Para calcular la Mediana, Me, debemos ordenar los números de menos a mayor, quedando:

28; 28; 28; 28; **28; 29**; 29; 30; 30; 35

Son los dos números que están en el medio, ya que a su izquierda hay 4 números y a su derecha, también hay 4 números. **Entonces la mediana es el promedio de ellos dos:**

$$\frac{28+29}{2} = 28,5$$

c) Si los datos están agrupados en una tabla de distribución de frecuencias, hay que agregar una nueva columna que se le llama Frecuencia Absoluta Acumulada, que se simboliza como **Fa** (que no es lo mismo que fa).

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

Veamos los dos ejemplos anteriores:

Variable: edad	fa	Fa
10	5	5
12	9	$5 + 9 = 14$
14	26	$26 + 9 + 5 = 40$
16	21	61
18	26	87
20	13	100

Total: 100

La Fa de cada valor de la variable se obtiene sumando a su fa, las fa de sus valores anteriores.

Este último debe coincidir con el valor total de datos.

Para poder calcular la Me en esta tabla, debemos buscar el número que esté en el medio, es decir en este caso el que ocupa la posición 50 (ya que $100 : 2 = 50$). Entonces debemos buscar en la columna de la Fa en dónde entraría el número 50.

Variable: edad	fa	Fa
10	5	5
12	9	14
14	26	40
16	21	61
18	26	87
20	13	100

Acá estaría el número que ocupa la posición número 50, entonces el valor de la variable que es la Me es el 16. **Me = 16**

Aclaración: si tuviéramos que ordenar los valores de la variable de menor a mayor, deberíamos escribir el 10 cinco veces, el 12 nueve veces y así, sucesivamente, quedando 100 números escritos. Luego buscar el número que está en el medio, que sería el que ocupa la posición 50. Para no tener que hacer este procedimiento, de escribir tantos números, directamente buscamos la mediana en la tabla.

En el otro ejemplo tenemos:

Variable: tiempo en minutos	fa	Punto Medio	Fa
[5 ; 10)	10	7,5	10
[10; 15)	14	12,5	24
[15 ; 20)	18	17,5	42
[20 ; 25)	8	22,5	50

Total: 50

Este último debe coincidir con el valor total de datos.

Para poder calcular la Me en esta tabla, debemos buscar el número que esté en el medio, es decir en este caso el que ocupa la posición 25 (ya que $50 : 2 = 25$). Entonces debemos buscar en la columna de la Fa en dónde entraría el número 25.

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

Variable: tiempo en minutos	fa	Punto Medio	Fa
[5 ; 10)	10	7,5	10
[10; 15)	14	12,5	24
[15 ; 20)	18	17,5	42
[20 ; 25)	8	22,5	50

→ Acá estaría el número que ocupa la posición número 25, entonces la Me está en el intervalo [15; 20).

MODA es el valor que más se repite o el que tiene mayor fa (frecuencia absoluta). La moda se la simboliza como **Mo**.

Por ejemplo

Supongamos las dos tablas anteriores:

Variable: edad	fa
10	5
12	9
14	26
16	21
18	26
20	13

El 14 y 18 son los dos valores de la variable que tienen mayor fa, entonces la Moda es: **Mo = 14 y 18**

Aclaración: la MODA puede ser uno o más valores de la variable.

a)

Variable: tiempo en minutos	fa	Punto Medio
[5 ; 10)	10	7,5
[10; 15)	14	12,5
[15 ; 20)	18	17,5
[20 ; 25)	8	22,5

La moda es el intervalo [15 ; 20) ya que es el que mayor fa tiene: **Mo = [15 ; 20)**

“COLEGIO MONSEÑOR SCALABRINI”



Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

TRABAJO PRÁCTICO N° . MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL.

Resolver los siguientes ejercicios.

- 1)** La Profesora de Matemática de 2° año tomó una evaluación y anotó en la libreta las notas que sus alumnos obtuvieron.

10 7 9 8 10 8 2 8 8 7
9 7 8 7 7 6 6 6 6 6
5 9 5 5 9 5 8 5 7 4
4 9 4 3 9 3 2 1 10 8

a) Hacer una Tabla de distribución de frecuencias.

b) Calcular promedio, mediana y moda.

- 2)** Se tomaron al azar 20 personas, y se midieron sus estaturas. Los resultados obtenidos en metros son:

1,56 1,61 1,81 1,76 1,58 1,62 1,77 1,69 1,59 1,75
1,78 1,68 1,79 1,82 1,66 1,70 1,69 1,72 1,59 1,72

a) Completar la tabla.

Variable: Altura	fa	Fa	Punto medio
[1,56; 1,62)			
[1,62; 1,68)			
[1,68; 1,74)			
[1,74; 1,80)			
[1,80; 1,86)			

b) Calcular promedio, mediana y moda.

Nombre y Apellido:

Año:

3) En una caja grande de fósforos se lee “contenido 222 fósforos”. Se contaron los fósforos de 30 cajas y se obtuvo lo siguiente:

222 223 222 221 224 222 220 221 222 223
224 222 223 225 222 224 222 221 222 223
222 221 222 223 220 225 224 223 222 222

a) Hacer una Tabla de distribución de frecuencias.

b) Calcular promedio, mediana y moda.

4) La siguiente tabla muestra la atención a pacientes en una clínica el último mes, según las edades.

Variable: edad	fa	Fa	Punto Medio
[0; 10)	120		
[10 ; 20)	35		
[20 ; 30)	24		
[30 ; 40)	38		
[40 ; 50)	20		

a) Completar la tabla.

b) Calcular promedio, mediana y moda.

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

PARÁMETROS DE DISPERSIÓN

Desviación estándar: mide la dispersión de los datos con respecto al promedio.



Ejemplo:

Dos alumnos A y B rindieron la misma cantidad de evaluaciones y obtuvieron distintas calificaciones. Si se busca el promedio de las calificaciones, ambos tienen el mismo promedio 7, pero B tiene un rendimiento más estable que A.

Notas de A	$(x_i - \bar{X})^2$
4	$(4 - 7)^2 = 9$
10	$(10 - 7)^2 = 9$
4	$(4 - 7)^2 = 9$
10	$(10 - 7)^2 = 9$

Notas de B	$(x_i - \bar{X})^2$
8	$(8 - 7)^2 = 1$
7	$(7 - 7)^2 = 0$
7	$(7 - 7)^2 = 0$
6	$(6 - 7)^2 = 1$

Se define como **Varianza:** $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2 \cdot fa_i}{n}$

Se define como **Desviación estándar:** $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{X})^2 \cdot fa_i}{n}}$

Por lo tanto, del ejemplo anterior podemos decir que:

$$\sigma^2_A =$$

$$\sigma_A =$$

$$\sigma^2_B =$$

$$\sigma_B =$$

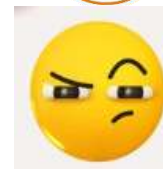
El valor de este parámetro es mayor cuando los datos están muy dispersos y es menor cuando están más concentrados. Como $\sigma_A > \sigma_B$, entonces A es más disperso que B.

Nombre y Apellido:

NIVEL SECUNDARIO

Año:

ACTIVIDADES:



1) Teniendo en cuenta los siguientes datos, resolver.

A: 8; 8; 9; 9; 9; 9; 10; 9; 10 **B:** 1; 3; 9; 6; 9; 11; 14; 13; 15 **C:** 1; 15; 11; 8; 8; 11; 9; 9; 9

- Realizar para cada caso la tabla de distribución de frecuencias sólo con las columnas de fa y Fa.
- Calcular el promedio, la mediana y la moda. ¿Qué tienen en común?
- ¿Qué grupo de datos se desvía menos con respecto al promedio?

2) La siguiente tabla muestra el sueldo mensual de los empleados de una empresa.

Sueldo en \$	Empleados
5000	5
5600	4
6000	6
6700	12
7000	10
8200	5
10000	3

¿Cuánto se desvían los sueldos con respecto a la media?

3) Se realizó el estudio de las estaturas (en cm) de los jugadores de tres equipos de un colegio.

	Balvanera	Pachanga	Los Estón
$\bar{X}$	173,2	176	170,1
σ	3,7	6,2	4,1

- ¿Qué equipo tendrá en jugador más alto?
- ¿Cuál es el equipo con la distribución más homogénea?

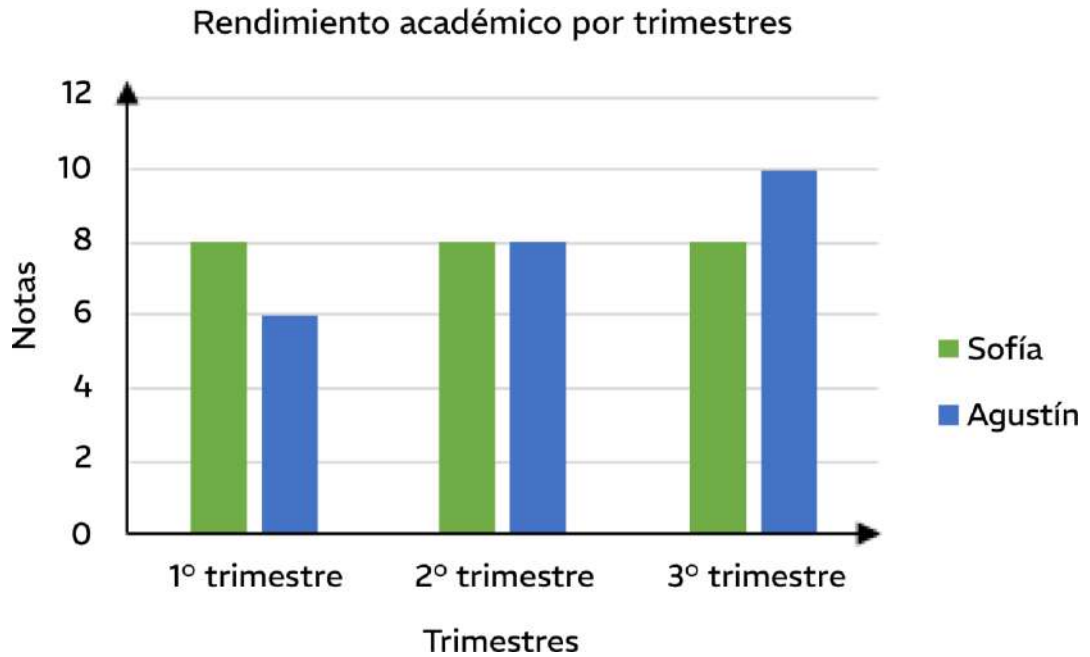
4) Marca la opción correcta

Dos estudiantes, Sofía y Agustín, asisten a un preuniversitario de inglés. Ambos obtuvieron el mismo promedio general: 8 puntos.

Se otorgará un premio a quien haya mostrado mayor regularidad en su rendimiento. Las calificaciones trimestrales de cada uno fueron:

Nombre y Apellido:

Año:

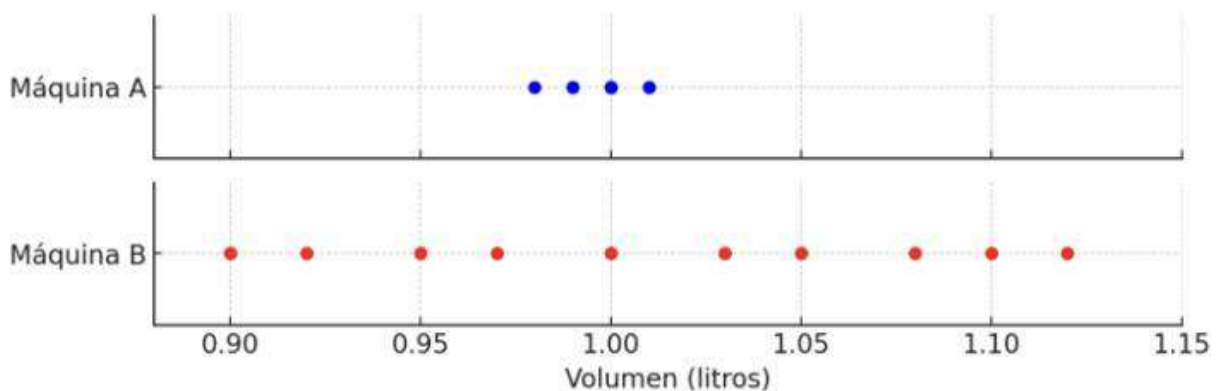


Según la información del gráfico, ¿quién debería recibir el premio?

- a) Sofia, porque tuvo menor dispersión en sus calificaciones.
- b) Agustín, porque alcanzó una nota más alta.
- c) Ambos deben recibir el premio.
- d) Agustín, porque tuvo un progreso más grande durante el año

Una empresa comparó el rendimiento de dos máquinas para llenar botellas de 1 litro.

En el siguiente gráfico se muestran los volúmenes (en litros) de 30 botellas llenadas por cada máquina.



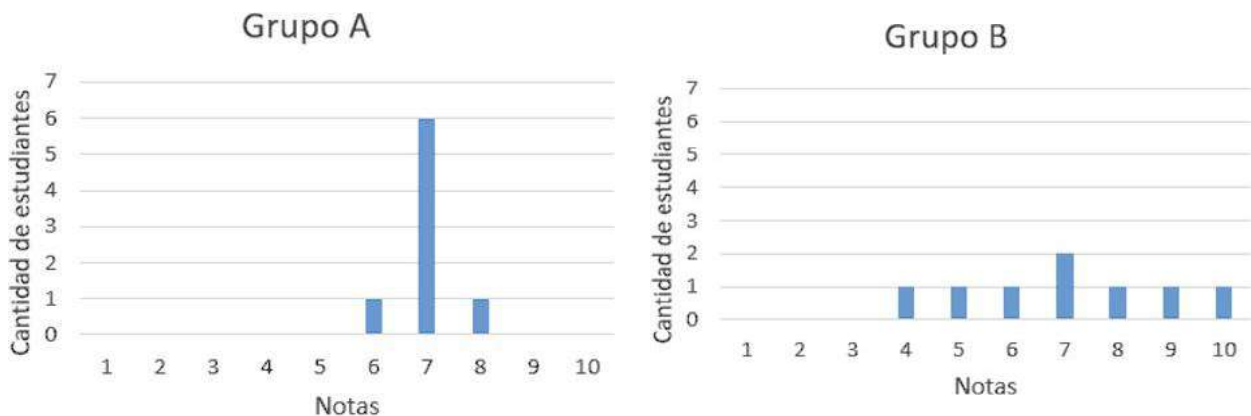
Nombre y Apellido:

Año:

Según los gráficos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a) Ambas máquinas presentan la misma dispersión.
- b) La máquina A tiene una menor dispersión que la máquina B.
- c) La máquina B tiene una dispersión nula.
- d) La máquina A muestra una dispersión mayor que la máquina B

Una docente comparó los resultados de dos grupos en un examen. Ambos grupos tuvieron el mismo promedio de nota (7 puntos). En los siguientes gráficos se muestran las notas obtenidas por los estudiantes de cada grupo:



Observando los gráficos, ¿cuál de los siguientes grupos presenta mayor varianza en sus calificaciones?

- a) Grupo A, porque todas las notas se concentran en torno al promedio.
- b) Grupo B, porque las notas están más alejadas del promedio.
- c) Grupo A, porque las notas son más bajas.
- d) Grupo B, porque tiene más estudiantes



FUNCIÓN EXPONENCIAL

Situación problema: La reproducción de las amebas.

Las amebas se reproducen dividiéndose en dos. Así, una ameba da origen, al dividirse, a dos amebas iguales; las cuales a su vez, cuando alcanzan cierto tamaño, se dividen y originan a cuatro amebas. En teoría, este proceso puede continuar indefinidamente si el medio es adecuado, supón que el tiempo de división de las amebas es de un día, ¿cuántas amebas habrá al cabo de 15 días, si inicialmente había una sola ameba?

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

1. Haz una primera estimación de tu resultado, ¿habrá menos de 100 amebas?, ¿entre 100 y 1000? ¿más de 1000?
2. En cada etapa, ¿cómo es el número de amebas respecto a la etapa anterior? ¿respecto a la siguiente?
3. ¿Qué operación debes hacer en cada etapa para obtener el número de amebas en la siguiente?
4. ¿Cuántas veces has repetido la misma operación en la tercera etapa?, ¿y en la octava?
5. Copia en tu cuaderno el cuadro siguiente y complétalo. Utiliza tu calculadora si es necesario.

Tiempo (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N° de amebas	1	2									

6. Si llamamos t al número de días transcurridos, ¿puedes proponer una fórmula que exprese el número de amebas en ese tiempo? Pon a prueba tu fórmula usando los valores del cuadro anterior.
7. Calcula, ¿cuántas amebas habrá después de 15 días?

La tabla anterior empleada para resolver el problema es una tabla de potencias de dos. Esto quiere decir que cada casilla en el renglón se obtiene multiplicando el valor anterior (de la izquierda) por dos. Decimos que 2 es la base y el número de veces que se ha tomado como factor esa base es el exponente; el resultado se llama potencia. Se escribe de la siguiente forma:

$$2^0 = 1 \text{ (por definición)}$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

En general, la potencia n -ésima de un número cualquiera se obtiene tomando n veces como factor ese número.

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Observar el siguiente video:

<https://www.youtube.com/watch?v=yL-XDK2ovjM>



Introducción a funciones exponenciales y logarítmicas.

Las funciones exponenciales y logarítmicas tienen aplicaciones en todos los campos del quehacer humano. Son particularmente útiles en el estudio de la química, la física, la biología y la ingeniería para describir la forma en que varían las cantidades. En esta unidad se examinarán las propiedades de estas funciones y se considerarán muchas de sus aplicaciones en la vida diaria. Empezaremos con algunos problemas que nos conducen a modelos de funciones exponenciales para su solución.

Características de la función exponencial.

Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función exponencial definida por: $f(x)=a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+$ y $a > 0$, $a \neq 1$

Algunas **propiedades** de la función $f(x)=a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, es decir, $a > 0$, $a \neq 1$.

- Su dominio es el conjunto de todos los números reales, es decir, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Su recorrido es el conjunto de todos los números reales positivos, es decir, $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}^+$ o también $]0, +\infty[$
- La función es continua en $\mathbb{R}$
- $f(0) = 1$, por lo tanto la curva asociada a la función interseca con el eje Y en el punto $(0, 1)$ y no se interseca con el eje X.
- Si $f(x)=f(y)$, entonces $x = y$, es decir, si $a^x=a^y$, entonces $x = y$
- $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$

ACTIVIDAD N° 1:

En las funciones de la forma $f(x) = a^x$ ¿Cómo varía la función con valores de $a < 1$? ¿Y con valores de $a > 1$?

Para responder al problema planteado utilizar el programa GeoGebra y graficar:

- $f(x) = (1/4)^x$ $f(x) = (1/2)^x$ $f(x) = (0,6)^x$
- ¿Qué ocurre con la curva a medida que crece el valor de a ?
- $f(x) = 2^x$ $f(x) = 3^x$ $f(x) = 4^x$
- ¿Qué ocurre con la curva a medida que crece el valor de a ?

Generalización:

- Si $a > 1$ en la función exponencial, es.....
- Si $0 < a < 1$ en la función exponencial, es.....



Observa el video para confirmar tus



respuestas

https://www.youtube.com/watch?v=Yb4KNO1_pAw

ACTIVIDAD N° 2

Graficar en la carpeta las siguientes funciones utilizando tabla de valores, luego sacar conclusiones observando las gráficas.

$$f(x) = 2^x \text{ y } f(x) = (1/2)^x$$

Generalización: si las bases de la función exponencial son.....las gráficas de las funciones son.....

El número e



<https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU>

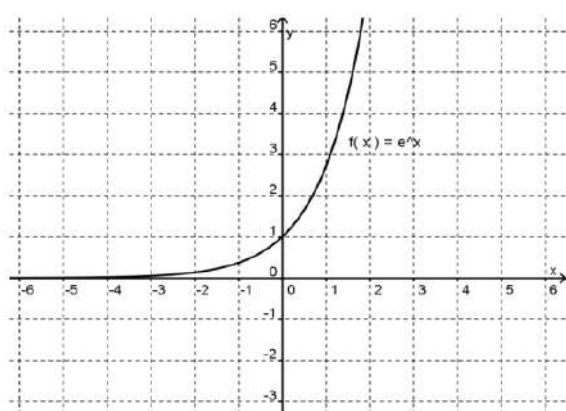


Aunque no podemos probarlo, la base a más importante en la función $f(x) = a^x$ es el número irracional $e = 2,718281828459....$

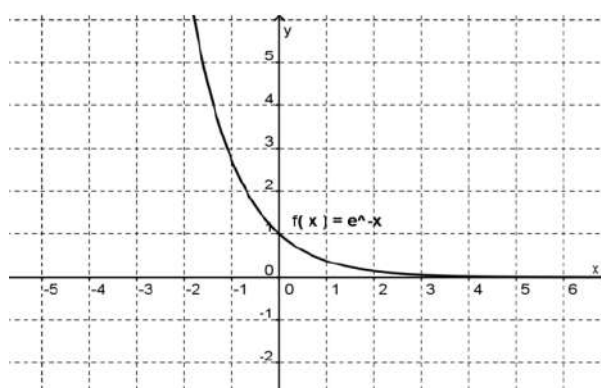
Debido a su importancia muchas calculadoras con funciones científicas tienen una tecla " e^x " directamente en lugar de utilizar a^x para cualquier número real x .

Las gráficas de $f(x) = e^x$ y $f(x) = e^{-x}$ son similares a las que se muestran en la siguiente figura.

$$Y = f(x) = e^x$$



$$y = f(x) = e^{-x}$$



El cálculo del número e surge del estudio de la función f definida por:

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ para } n \text{ entero positivo.}$$

Puede probarse que los valores funcionales se acercan al número e , a medida que n aumenta sin límite, es decir:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Se puede comprobar con la siguiente tabla:

n	$f(n)$
1	2.0000000
10	2.5937425
100	
1000	
10000	
100000	
1000000	
10000000	

ACTIVIDAD N°3

En las funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^x$ y $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ¿Qué se modifica al cambiar el valor de k ?

Para responder al problema planteado utilizar el programa GeoGebra y graficar:

- $f(x) = 2^x$ $f(x) = 3 \cdot 2^x$ $f(x) = 5 \cdot 2^x$

Generalización: el valor de “ k ” en una función exponencial representa.....

ACTIVIDAD N° 4

Graficar en la carpeta las siguientes funciones utilizando tabla de valores, luego sacar conclusiones observando las gráficas.

$$f(x) = 2^x$$

$$f(x) = -2^x$$

$$f(x) = 2^{-x}$$

Generalización:

- Cuando “ a ” es negativa, la gráfica de la función exponencial.....
- Cuando “ x ” es negativa, la gráfica de la función exponencial.....

ACTIVIDAD N°5

En las funciones de la forma $f(x) = a^{x+b}$ ¿Qué corrimiento se observa al cambiar el valor de b ?

Para responder al problema planteado utilizar el programa GeoGebra y graficar:

- $f(x) = 2^x$ $f(x) = 2^{x-1}$ $f(x) = 2^{x+1}$

Generalización:

- Si $b > 0$, la grafica de la función se traslada.....
- Si $b < 0$, la grafica de la función se traslada.....

ACTIVIDAD N°6

En las funciones de la forma $f(x) = a^x + c$ y $c \in \mathbb{R}$ ¿Qué corrimiento se observa al cambiar el valor de c ?

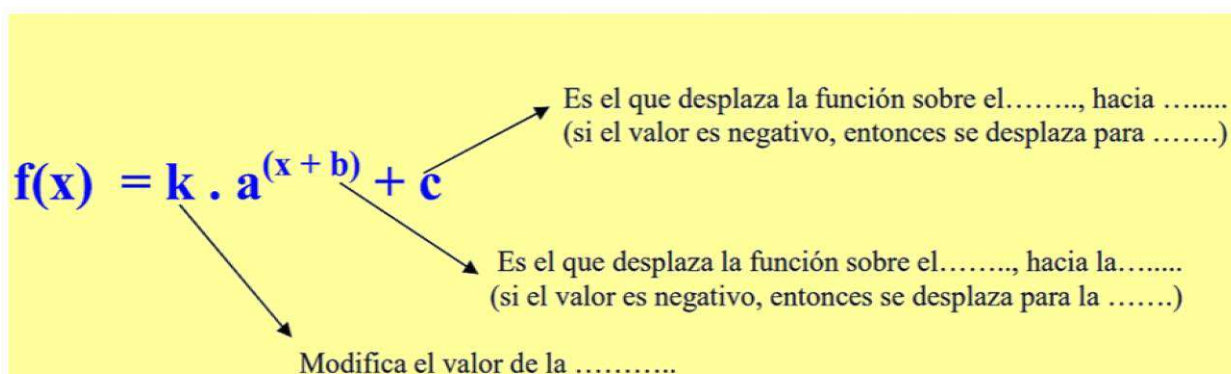
Para responder al problema planteado utilizar el programa GeoGebra y graficar:

- $f(x) = 2^x$ $f(x) = 2^x + 1$ $f(x) = 2^x - 1$

Generalización:

- Si $c > 0$, la gráfica de la función se traslada.....
- Si $c < 0$, la gráfica de la función se traslada.....

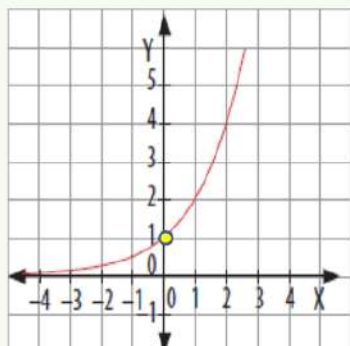
Concluyendo....



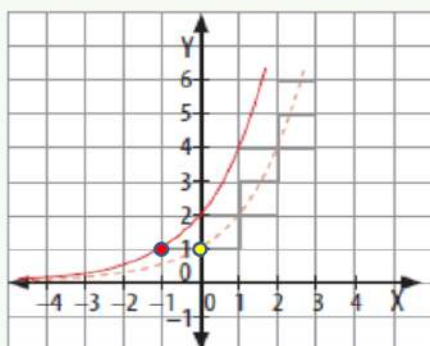
Ejemplo de análisis de una función exponencial.

Ejemplo: $f(x) = 2^{x+1} - 2$

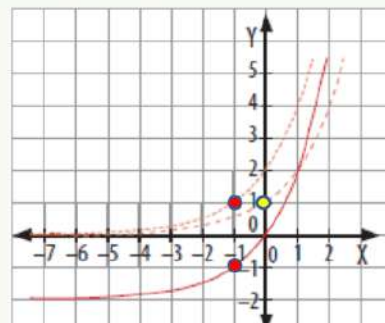
Paso 1 Se grafica $y = 2^x$.



Paso 2 Se traslada horizontalmente una unidad hacia los negativos, para obtener $y = 2^{x+1}$.



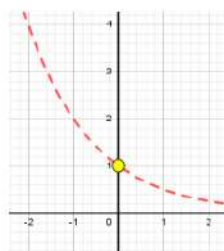
Paso 3 Se traslada verticalmente dos unidades hacia los negativos, para obtener $y = 2^{x+1} - 2$.



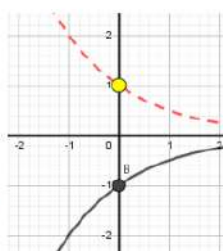
Sea $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-(x+1)} + 2$. Determine la gráfica de la función a partir de la función original

Analizando la función

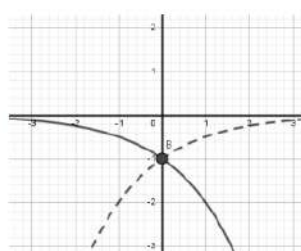
- ✓ "a" se encuentra $0 < a < 1$ por lo tanto, es decreciente.
- ✓ "a" es negativo, por lo tanto, se refleja respecto al eje X
- ✓ "x" es negativo, por lo tanto, se refleja respecto al eje Y
- ✓ $c > 0$, por lo tanto, se traslada verticalmente 2 unidades hacia arriba.
- ✓ $b < 0$, por lo tanto, se traslada horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda



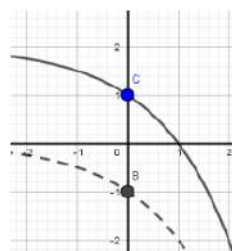
▪ Función original decreciente.



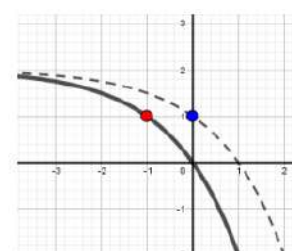
▪ Reflexión respecto a X



▪ Reflexión respecto a Y



▪ Traslación vertical 2 unidades hacia arriba



▪ Traslación horizontal 1 unidad hacia izquierda

Análisis completo de la función exponencial



https://www.youtube.com/watch?v=egHWd_l-gbg



ACTIVIDAD N°7

Dada las siguientes funciones analice su comportamiento, comparándola con su función generatriz y realice su análisis:

- a) $f(x) = 3 \cdot 5^{x-1}$
- b) $f(x) = (1/3)^x + 2$
- c) $f(x) = (3)^{x+3}$

TRABAJO PRÁCTICO- FUNCIÓN EXPONENCIAL

- a) Sea la función $f(x) = 4^x - 2$ analice si es creciente o decreciente, determine el Dominio, imagen, asíntota, ordenada al origen y raíz si la tuviera.
- b) Encuentra una función simétrica de $f(x) = 3^x$ con respecto al eje x.
- c) Encuentra una función simétrica de $f(x) = 5^x$ con respecto al eje y.
- d) De la fórmula de las funciones que cumplan con las siguientes características, siendo la función generatriz $f(x) = 4^x$
- Que se desplace horizontalmente 5 unidades a la derecha.
 - Que su ordenada sea -2.
 - Que su asíntota sea $y=1$.
 - Que su simétrica respecto del eje y, se traslade 3 unidades a la izquierda.
- e) Dada las siguientes funciones analice su comportamiento, comparándola con la función generatriz.

$$Y = 10^{(x+3)} + 3$$

$$Y = 10^{(x-3)} + 3$$

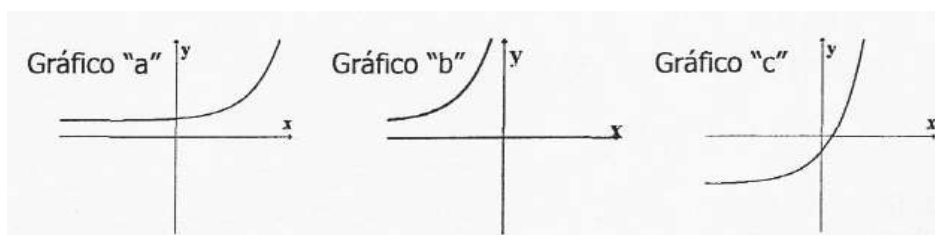
$$Y = 10^{(x+3)} - 3$$

- f) Asociar cada una de las siguientes funciones con el gráfico que le corresponde:

26) $Y = 2^{(x+3)} + 1$

27) $Y = 2^{(x+1)} - 3$

28) $Y = 2^{(x-3)} + 1$



Situaciones problemas

Resolver los siguientes problemas para observar la aplicación de la función exponencial en distintas situaciones de la vida real.

1. La temperatura interior de una heladera (que no se abre) sigue, aproximadamente, la siguiente función: $T(t) = 25 \cdot (0,8)^t$, donde t es el tiempo en minutos y T es la temperatura en grados centígrados.

a) ¿Cuál es la temperatura interna de la heladera en el instante en que es enchufada? ¿Y a los 10 minutos?

b) En qué momento la temperatura es 0°C ?

2. Una computadora comprada en 2008 costó \$ 2400. A medida que pasó el tiempo, y como producto de los avances en diseños, programas, velocidades de las máquinas, etc., la computadora se desvalorizó. Cada año que transcurre pierde en un 25% su valor de venta. La función $P(t) = 2400 \cdot (3/4)^t$ establece una relación entre el precio de la máquina (en pesos) y el tiempo (en años).

a) ¿Cuánto costó la máquina al cabo de 5 años, o sea, en el año 2013?

b) ¿En qué momento su costo será de \$ 0?

3. La cantidad de habitantes de un cierto país se puede aproximar por la siguiente función: $f(n) = 1.200.000 \cdot (1,03)^n$, donde n representa la cantidad de años que transcurren. La primera medición se realizó en 2000.

a) ¿Qué cantidad de habitantes había en 2000? ¿Y en 2005?

b) ¿En qué año la población será de 12.000.000 de habitantes?

Situación problema

Dada la $f(x) = 4^x - 2$ se quiere obtener la raíz exacta, es decir en que valor toca el eje de las "x".

Y si fuera la siguiente función $f(x) = 4^x - 3$?

Por ello surge lo que llamaremos LOGARITMO!!!

LOGARITMO



Observamos la explicación y origen de los logaritmos.

https://www.youtube.com/watch?v=W_BZb_va6jY&t=176s



Definición de logaritmo:

El logaritmo en base a de un número b es la potencia c , a la que hay que elevar el número a para que dé por resultado el número b . Simbólicamente se escribe:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

y se lee logaritmo en base a de b es igual a c .

Esta definición es válida para $a > 0$ pero diferente de 1 y $b > 0$.

Por tanto, un logaritmo tiene tres partes:

1. La palabra log: que indica que la operación que se va a hacer es un logaritmo
2. La base del logaritmo, a : Es un subíndice que indica la base del logaritmo
3. El número del cual se calculará el logaritmo: c

Ejemplos:

- a) $\log_2 8 = 3$, ya que 2 elevado a 3 da 8
- b) $\log_{10} 100 = 2$ ya que 10 elevado a 2 da 100
- c) $\log_3 3 = 1$, ya que 3 elevado a 1 da 3

¿Como se calculan los logaritmos?

Para calcular los logaritmos es conveniente seguir los siguientes pasos:

1) Factorizar el número del que se quiere calcular el logaritmo hasta dejarlo con la misma base del logaritmo

2) Aplicar la definición de logaritmo.

$$a) \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 : \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

es igual a
 $\log_2 8 = 3$
 elevado a

$$b) \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 : \Leftrightarrow 10^2 = 100$$

es igual a
 $\log_{10} 100 = 2$
 elevado a

000000J00000 MANOLO!!!!



- Los logaritmos en base 10 NO suelen llevar la base explicita.
Un logaritmo en base 10 se escribe:
$$\log 100 = 2$$
- Los logaritmos en base e o *logaritmos neperianos* se denotan con el texto $\ln$

$$\log 100 = 2$$

ACTIVIDAD N° 1: Calcular los siguientes logaritmos.

b) $\log_3 27 =$

f) $\log_3 \sqrt{3}$

c) $\log_2 1 =$

g) $\log_4 \frac{1}{2} =$

d) $\log_3 \frac{1}{729} =$

h) $\log_4 2\sqrt{2} =$

ACTIVIDAD N°2: Reemplaza el * por el valor que corresponda:

a) $\log_6 \frac{1}{36} = \#$

d) $\log_8 256 = *$

b) $\log_{*} 8 = 3$

e) $\log_* \frac{1}{343} = 3$

c) $\log_2 * = 4$

f) $\log_{729} * = \frac{1}{3}$

Cambio de base

Las calculadoras permiten calcular dos tipos de logaritmos: decimales (base=10) y neperianos o naturales (base=e), que se estudian en cursos posteriores.

Cuando queremos calcular logaritmos en cualquier otra base tenemos que recurrir a la fórmula del cambio de base: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

ACTIVIDAD N°3:

Grafiquemos en GeoGebra $f(x) = 2^x$ $f(x) = \log_2 x$ $f(x) = x$.

Probemos con otros números en las bases de la función exponencial y en la del logaritmo.

- a- Que característica tiene la $f(x) = x$?
- b- ¿Qué conclusiones podemos sacar? Con respecto a las funciones logarítmicas y exponenciales de igual base.

Propiedades de la función logarítmica.

Si observamos la gráfica de la función logarítmica podemos concluir las siguientes propiedades.

- a) *El dominio de la función es el conjunto de los números reales positivos.*
- b) *El rango o imagen de la función es el conjunto de los números reales.*
- c) *La intersección con el eje "x" es 1.*
- d) *La gráfica no intercepta al eje "y".*
- e) *El eje "y" es una asíntota vertical.*
- f) *La función es creciente en el intervalo $(0; +\infty)$ si $a > 1$ y decreciente en el intervalo $(0; +\infty)$ si $0 < a < 1$.*

ACTIVIDAD N°4

Graficar en la carpeta las siguientes funciones utilizando tabla de valores, luego sacar conclusiones observando las gráficas.

$$f(x) = \log_{10} x \quad f(x) = \log_2 x \quad f(x) = \log_3 x$$

Analizar el dominio, imagen, ordenada y raíces.

ACTIVIDAD N°5

Determinar si existe alguna relación entre las funciones $f(x) = \log_3 x$ y $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Para responder el problema planteado utilizar el programa GeoGebra y graficar:

- Si $a > 1$ en la función exponencial, es.....
- Si $0 < a < 1$ en la función exponencial, es.....

Por lo tanto las dos funciones son.....

ACTIVIDAD N°6:

En las funciones de la forma $f(x) = \log(x - b)$ y $b \in \mathbb{R}$. ¿Qué corrimiento se observa al cambiar el valor de b ?

Para responder el problema planteado utilizar el programa GeoGebra y graficar:

$$f(x) = \log(x) \quad f(x) = \log(x - 3)$$

$$f(x) = \log(x + 4)$$

Generalización:

- Si $b > 0$, la gráfica de la función se traslada.....
- Si $b < 0$, la gráfica de la función se traslada.....
- ¿Como calculamos los valores de las intersecciones con el eje “x” y el eje “y”?
- ¿Qué sucede con el dominio?

ACTIVIDAD N°7:

En las funciones de la forma $f(x) = \log(x) + c$ y $c \in \mathbb{R}$. ¿Qué corrimiento se observa al cambiar el valor de c ?

Para responder el problema planteado utilizar el programa GeoGebra y graficar:

$$f(x) = \log(x) \quad f(x) = \log x + 3$$

$$f(x) = \log x - 2$$

Generalización:

- Si $c > 0$, la gráfica de la función se traslada.....
- Si $c < 0$, la gráfica de la función se traslada.....
- ¿Como calculamos los valores de las intersecciones con el eje “x” y el eje “y”?
- ¿Qué sucede con el dominio y la imagen?

Se puede resumir en la siguiente tabla las transformaciones de $f(x) = \log(x)$, llamando ahora m y k a los desplazadores:

	Dominio	Desplazamiento	Asíntota
$h(x) = \log x + m$	$(0; +\infty)$	m unidades hacia arriba	$x = 0$
$t(x) = \log x - m$	$(0; +\infty)$	m unidades hacia abajo	$x = 0$
$s(x) = \log (x + k)$	$(-k; +\infty)$	k unidades a la izquierda	$x = -k$
$n(x) = \log (x - k)$	$(k; +\infty)$	k unidades a la derecha	$x = k$

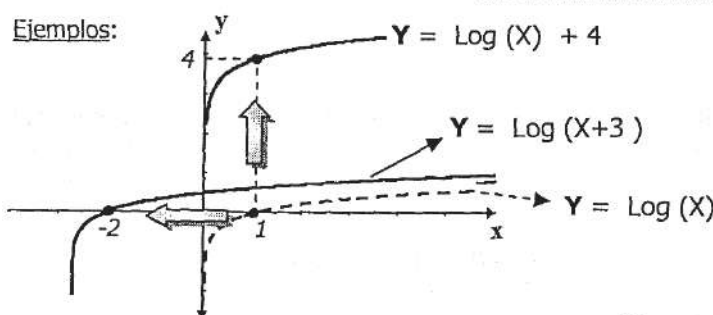
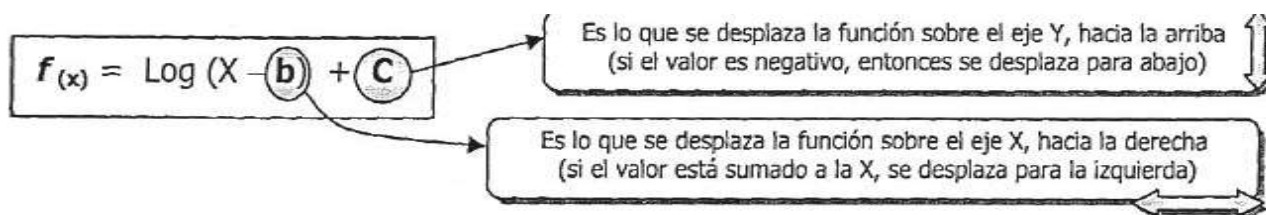
Análisis completo de la función logarítmica.



<https://www.youtube.com/watch?v=k8fUkh4ZoGk>



Resumimos las traslaciones de la función logarítmica



Logaritmo natural (base e)

De todas las posibles bases "a" para logaritmos, resulta que la elección más conveniente para fines del cálculo es el número "e", mismo que ya se definió anteriormente. El logaritmo con base "e" se conoce como logaritmo natural y se denota por $\ln$.

$$\ln x = \log_e x$$

ACTIVIDAD N°8:

¿Cómo graficamos la función $\ln x$? Realizamos su grafica con tabla de valores y también la de $f(x) = e^x$, en un mismo gráfico.
¿qué conclusiones puedes obtener?

ACTIVIDAD N°9:

Hallar ceros, conjuntos de positividad y negatividad y dominio de las funciones:

$$t(x) = \log_2 (2x - 1)$$

$$h(x) = \log_{\frac{1}{3}} (-4x)$$

$$f(x) = \log_4 (3x + 1) - 2$$

EJERCITACIÓN :

A-Graficar en forma aproximada las siguientes funciones:

1) $Y = \text{Log} (X-1) + 3$

2) $Y = \text{Log} (X+2) - 5$

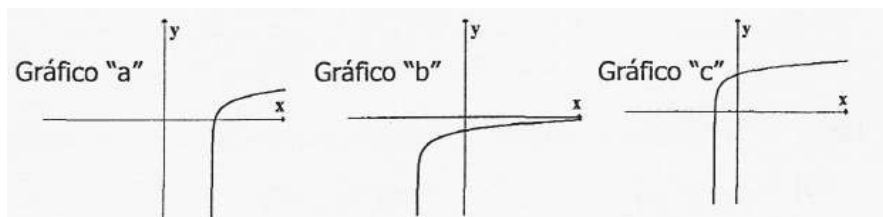
3) $Y = \text{Ln} (X-2) + 2,5$

B- Asociar cada una de las siguientes funciones con el gráfico que le corresponde:

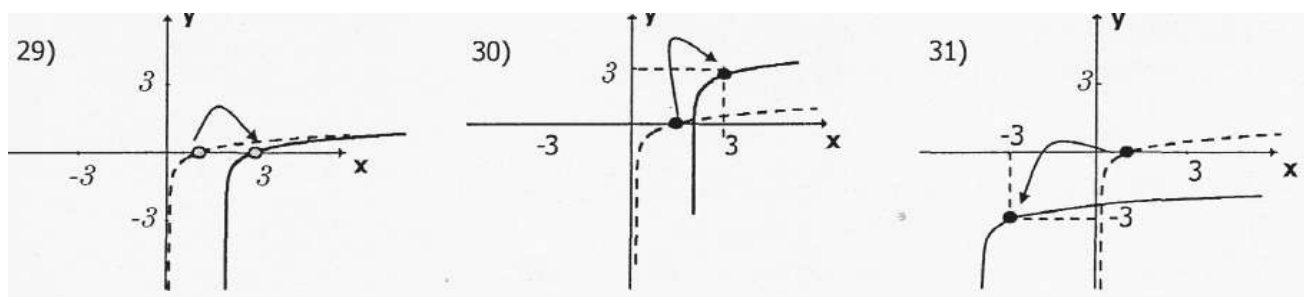
23) $Y = \text{Log} (X+1) + 2$

24) $Y = \text{Log} (X+2) - 1$

25) $Y = \text{Log} (X-2) + 1$



C- Hallar "a" y "b" para que la gráfica represente la traslación de las siguientes funciones logarítmicas. Dicho de otra manera, escribir la fórmula de las funciones: $f(x) = \text{Log} (x-a) + b$



D- Hallar el dominio y las intersecciones con el eje x e y, de las siguientes funciones logarítmicas:

44) $F(x) = \text{Log} (X)$

45) $F(x) = [\text{Log}_2 (X)] + 1$

46) $F(x) = [\text{Log}_{10} (X+3)] - 2$

47) $F(x) = [\text{Ln} (X-1)] + 5$

TRABAJO PRÁCTICO

1) Conociendo la grafica $f(x) = 2^x$ confecciona las de $f(x) = 2^x + 1$ y $f(x) = 2^{x+1}$ Y anota las conclusiones, con respecto a sus desplazamientos, raíces, dominio, imagen, etc.

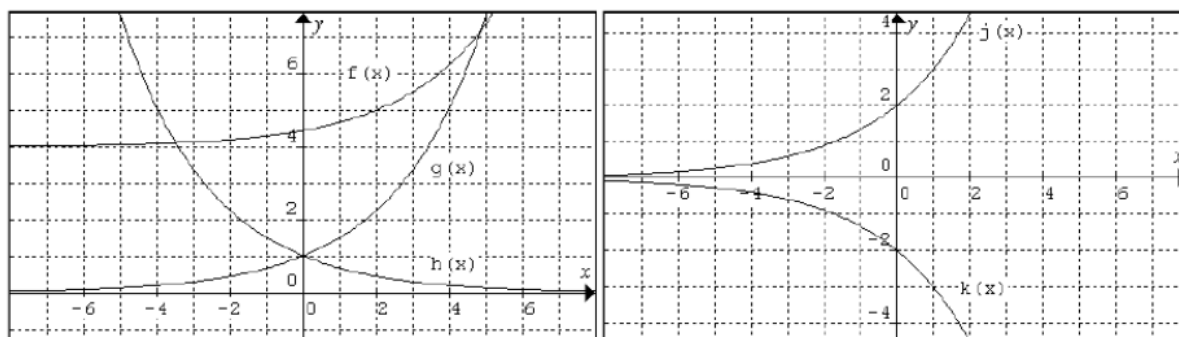
2) Representa en un mismo sistema de ejes cartesianos las siguientes funciones:

$$f(x) = \log_2 x \quad f(x) = \log_2(x+1) \quad f(x) = \log_2 x + 1$$

Y anota las conclusiones, con respecto a sus desplazamientos, raíces, dominio, imagen, etc.

3) Analiza las graficas de las siguientes funciones:

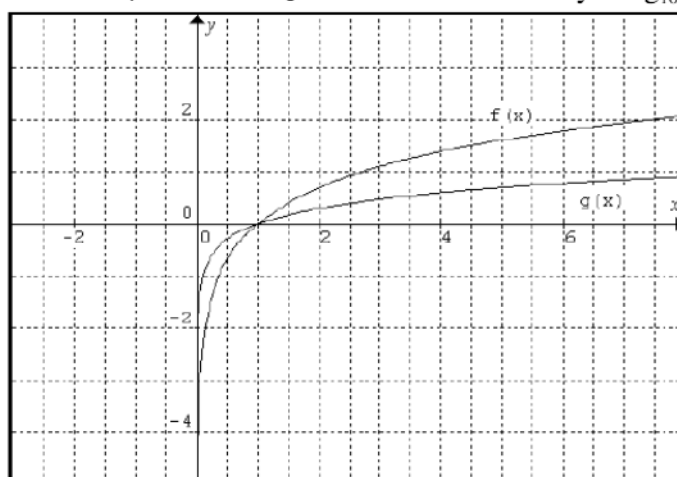
$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2} + 4 \quad y = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad y = \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad y = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$$



- Indicar que ecuación le corresponde a cada gráfica, justificando.
- Indicar dominio, imagen y asíntota de cada función.
- Determinar analíticamente el corte con el eje y de la función $f(x)$.
- Algunas de las funciones dadas son simétricas. Indica cuáles son, justifica porqué e indica respecto de qué recta son simétricas.

4)

A continuación se presentan los gráficos de las funciones: $y = \log_{10}(x)$ e $y = \log_e(x)$



- Indicar la ecuación de cada una de las funciones, justificando.
- Indica dominio, imagen, asíntota y conjuntos de positividad y negatividad de cada función.
- Determina analíticamente los cortes con los ejes de cada función.
- Para cada una de las siguientes funciones:
 $h(x) = f(x+2)$ $j(x) = f(x+3) - 2$ $k(x) = -f(x)$

Dar la expresión explícita.

- Determinar analíticamente los cortes de la función $j(x)$ con los ejes.